บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

2.1 บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยถูกนำมาใช้อธิบายปัญหาต่าง ๆ อย่างกว้างขวางมากกว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญมาก เพราะปัญหาในระบบจริง (ไม่ใช่ในตำราเรียนคณิตศาสตร์เบื้องต้น) ระบบหนึ่ง ๆ มักจะมีตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัวเสมอ ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สำคัญมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง	สมการ	ตัวอย่างการใช้งาน
Laplace's equation	$\nabla^2 u = 0$	สนามศักย์ (potential field)
Poisson's equation	$\nabla^2 u = f(x,y,z)$	สนามศักย์ในระบบที่มีประจุเกี่ยวข้อง
diffusion equation	$\nabla^2 u = \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial u}{\partial t}$	การนำความร้อน การแพร่
wave equation	$\nabla^2 u = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	การแผ่ของคลื่นชนิดต่าง ๆ
Schrödinger equation	$\left\{-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)\right\}\Psi = i\hbar\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}$	กลศาสตร์ควอนตัม

ตัวอย่างเหล่านี้ล้วนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง สมการชนิดนี้มีรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น คือ

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \tag{2.1}$$

สัมประสิทธิ์ต่าง ๆ อาจจะเป็นค่าคงตัวหรือฟังก์ชันของตัวแปรต้น x และ y สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.1) สามารถแบ่งออกเป็น 3 ประเภท ตามค่าของสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$AC - B^2 \begin{cases} > 0 & \text{elliptic equation เช่น Helmholtz differential equation} \\ < 0 & \text{hyperbolic equation เช่น wave equation} \\ = 0 & \text{parabolic equation เช่น diffusion equation} \end{cases}$$

สมการแต่ละชนิดจะมีธรรมชาติและการใช้งานที่แตกต่างกัน เช่น สมการอิลลิปติก (elliptic equation) จะใช้อธิบายปรากฏการณ์สถานะคงตัว (steady state phenomena) ในขณะที่สมการไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic equation) และสมการพาราโบลิก (parabolic equation) ใช้อธิบายปรากฏการณ์แบบขึ้นกับเวลา (time-dependent) หรือที่มีการเปลี่ยนสถานะ (transition) ตัวอย่างของสมการแต่ละชนิด รวมทั้งการหาผลเฉลยจะอธิบายในหัวข้อถัดไป

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์เฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz differential equation)

สมการเชิงอนุพันธ์เฮล์มโฮลทซ์เป็นสมการแบบอิลลิปติก ซึ่งมีรูปทั่วไป ดังนี้

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{2.2}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัว และ ∇^2 คือ ลาปลาเซียน (Laplacian) ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) 2 มิติ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ดังนั้น สมการเฮล์มโฮลทซ์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ จะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{2.3}$$

ในการหาผลเฉลยของสมการ (2.3) เราจะใช้วิธีแยกตัวแปร (separation of variables method) ซึ่งเป็นวิธีพื้นฐานที่สำคัญในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอื่น ๆ ด้วย

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยวิธีแยกตัวแปร เริ่มต้นด้วยการสมมุติผลเฉลยให้อยู่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชันของตัวแปรต้น

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{2.4}$$

แล้วแทนค่าสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.3) จะได้

$$\frac{d^2X}{dx^2} Y + \frac{d^2Y}{dy^2} X + k^2 XY = 0 \tag{2.5}$$

หารสมการ (2.5) ตลอดด้วย XY

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 = 0 \tag{2.6}$$

จะเห็นว่า สมการ (2.6) เป็นสมการที่แยกตัวแปรแล้ว โดยตัวแปร x ปรากฏอยู่ในพจน์แรกเท่านั้น ในทำนองเดียวกันตัวแปร y ก็ปรากฏอยู่ในพจน์ที่สองเท่านั้น

แต่พจน์ที่สามซึ่งเป็นค่าคงตัวก็มีความสำคัญไม่น้อยไปกว่ากัน มาลองคิดกันว่า ถ้าพจน์ที่สามเป็นค่าคงตัวแล้วพจน์ที่หนึ่งและสองจำเป็นต้องเป็นค่าคงตัวด้วยหรือไม่ ? (เพื่อให้สมการ (2.6) เป็นจริง) ถ้าเราหาอนุพันธ์ของสมการ (2.6) เทียบกับ x จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}\right) + \frac{d}{dx}k^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}\right) = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \text{ค่าคงตัว}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเราหาอนุพันธ์ของสมการ (2.6) เทียบกับ y จะได้ว่า

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \text{ค่าคงตัว}$$

ขั้นต่อไป ถ้าเรากำหนดให้

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -m^2 \qquad [-m^2 : \text{separation constant}] \tag{2.7}$$

โดยค่าคงตัว $-m^2$ คือ ค่าคงตัวการแบ่ง (separation constant) จะได้ว่า

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = m^2 - k^2 \tag{2.8}$$

จะเห็นว่า สมการ (2.7) และ (2.8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้ง่ายกว่ามาก กล่าวได้ว่า หัวใจสำคัญของวิธีแยกตัวแปรสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง คือการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองออกเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง 2 สมการ แล้วหาผลเฉลยจากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่แก้ง่ายกว่า

การหาผลเฉลยของสมการ (2.7)

เขียนสมการ (2.7) ให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$\frac{d^2X}{dx^2} + m^2X = 0 \tag{2.9}$$

ใช้ตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator) $D \equiv \frac{d}{dx}$ เราจะเขียนสมการ (2.9) ในรูป

$$D^2X + m^2X = 0$$

$$D^2 + m^2 = 0 \tag{2.10}$$

สมการ (2.10) นี้เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ราก (root) ของสมการนี้คือ

$$D = \pm im$$

จากสมการ (A12) ในภาคผนวก เราจะได้ว่า ผลเฉลยของสมการ (2.9) คือ

$$X(x) = Ae^{imx} + Be^{-imx} \tag{2.11}$$

การหาผลเฉลยของสมการ (2.8)

เขียนสมการ (2.8) ให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - (m^2 - k^2)Y = 0 \tag{2.12}$$

สมการลักษณะเฉพาะที่สอดคล้อง คือ

$$D^2 - (m^2 - k^2) = 0$$

$$D = \pm\sqrt{m^2 - k^2}$$

จากสมการ (A8) ในภาคผนวก เราจะได้ว่า ผลเฉลยของสมการ (2.12) คือ

$$Y(y) = Ce^{\sqrt{m^2-k^2}\,y} + De^{-\sqrt{m^2-k^2}\,y} \tag{2.13}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเฮล์มโฮลทซ์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 2 มิติ (2.3) คือ

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$u(x,y) = \left(Ae^{imx} + Be^{-imx}\right)\left(Ce^{\sqrt{m^2-k^2}\,y} + De^{-\sqrt{m^2-k^2}\,y}\right) \tag{2.14}$$

หรือเขียนในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ได้ดังนี้ [หมายเหตุ $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$]

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} \left\{A\cos(mx) + iA\sin(mx)\right\} \\ +\left\{B\cos(mx) - iB\sin(mx)\right\} \end{bmatrix}\left[Ce^{\sqrt{m^2-k^2}\,y} + De^{-\sqrt{m^2-k^2}\,y}\right]$$

$$u(x,y) = \left[(A+B)\cos(mx) + i(A-B)\sin(mx)\right]\left[Ce^{\sqrt{m^2-k^2}\,y} + De^{-\sqrt{m^2-k^2}\,y}\right]$$

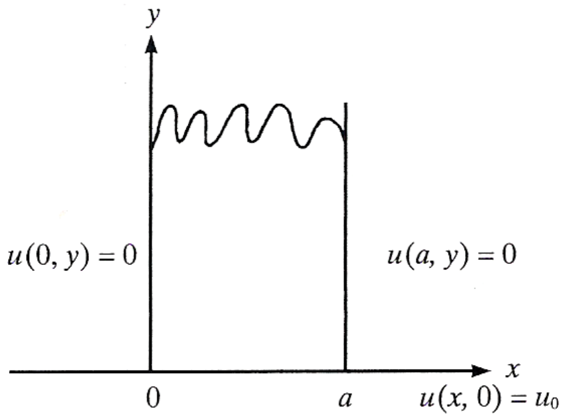
$$u(x,y) = \left[E\cos(mx) + F\sin(mx)\right]\left[Ce^{\sqrt{m^2-k^2}\,y} + De^{-\sqrt{m^2-k^2}\,y}\right] \tag{2.15}$$

สมการเฮล์มโฮลทซ์ $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ นี้ มีการประยุกต์ใช้และมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับสมการอื่น ๆ หลายชนิด เช่น สมการลาปลาซ $\nabla^2 u = 0$ จะเห็นว่า ถ้าเรากำหนดให้ $k = 0$ สมการเฮล์มโฮลทซ์ก็จะลดรูปเป็นสมการลาปลาซ ดังนั้นจากสมการ (2.14) จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการลาปลาซในระบบ 2 มิติ คือ

$$u(x,y) = \left[E\cos(mx) + F\sin(mx)\right]\left[Ce^{my} + De^{-my}\right] \tag{2.16}$$

นอกจากนี้สมการเฮล์มโฮลทซ์ยังเชื่อมโยงกับสมการการแพร่ $\nabla^2 u = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t}$ และสมการคลื่น $\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ด้วย โดยจะสมมูลกับสมการส่วนที่ขึ้นกับตำแหน่ง (รายละเอียดจะแสดงในหัวข้อถัดไป)

ตัวอย่าง 2.1 ศักย์ไฟฟ้า $u(x,y)$ ที่จุดใด ๆ ภายในบ่อศักย์สี่เหลี่ยมผืนผ้า (ดูรูป) สามารถอธิบายด้วยสมการลาปลาซ จงหาผลเฉลย $u(x,y)$ ภายใต้เงื่อนไขที่ขอบต่อไปนี้ คือ $u(0,y) = u(a,y) = u(x,\infty) = 0$ และ $u(x,0) = u_0$



วิธีทำ ผลเฉลยทั่วไปของปัญหาข้อนี้ เขียนอยู่ในรูปสมการ (2.16) ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการลาปลาซ

$$u(x,y) = \left[E\cos(mx) + F\sin(mx)\right]\left[Ce^{my} + De^{-my}\right]$$

ค่าคงตัว E , F , C และ D สามารถหาได้จากเงื่อนไขที่ขอบที่โจทย์กำหนดให้

ใช้เงื่อนไขที่ขอบ $u(x,\infty) = 0$

$$u(x,\infty) = 0 = \left[E\cos(mx) + F\sin(mx)\right]\left[Ce^{\infty} + 0\right]$$

จะได้

$$C = 0$$

ใช้เงื่อนไขที่ขอบ $u(0,y) = 0$

$$u(0,y) = 0 = \left[E\cos(0) + F\sin(0)\right]\left[De^{-my}\right]$$

จะได้

$$E = 0$$

ใช้เงื่อนไขที่ขอบ $u(a,y) = 0$

$$u(a,y) = 0 = \left[F\sin(ma)\right]\left[De^{-my}\right]$$

จะได้ว่า

$$m_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ตอนนี้ผลเฉลยจะเป็น

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n' \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

โดยที่

$$F_n' = F_n D_n$$

ใช้เงื่อนไขที่ขอบอันสุดท้าย $u(x,0) = u_0$ เพื่อหาค่าของ F_n'

$$u(x,0) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n' \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad \text{(ถ)}$$

สมการนี้สามารถพิจารณาเป็นสมการอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ได้ (Fourier sine series)

ทบทวนอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

เมื่อ

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

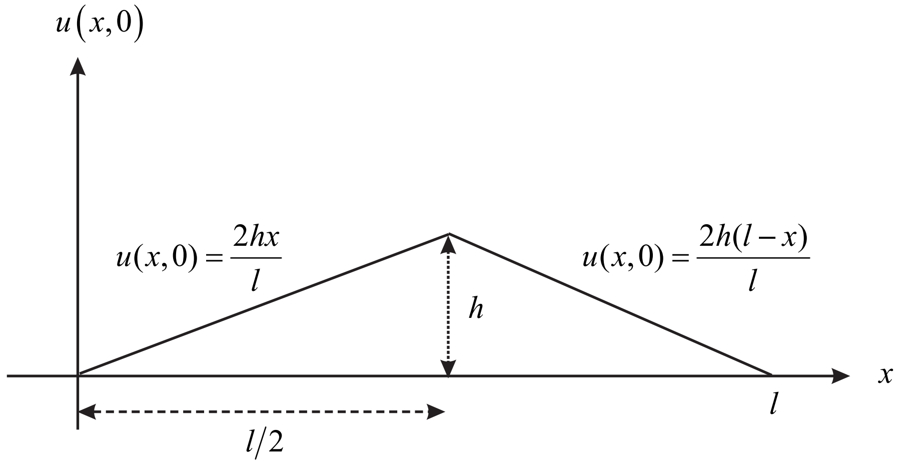
จะเห็นว่า สมการ (ถ) นั้นสมมูลกับสมการอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ โดยที่ $F_n' \leftrightarrow b_n$, $a \leftrightarrow L$ และ $u_0 \leftrightarrow f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
F_n' &= \frac{2}{a}\int_0^a u_0 \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \\
&= \frac{2u_0}{a}\int_0^a \left(\frac{a}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) d\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
&= \frac{2u_0}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a \\
&= \frac{2u_0}{n\pi}\left[-\cos n\pi + \cos 0\right] \\
&= \frac{4u_0}{n\pi} \qquad \text{สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคี่ (ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่จะมีค่าเป็นศูนย์)}
\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า F_n' ลงในสมการ (ถ) จะได้ผลเฉลย ศักย์ไฟฟ้า $u(x,y)$ ที่จุดใด ๆ ภายในบ่อศักย์สี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็น

$$u(x,y) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ odd}}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-n\pi y/a}$$

ตัวอย่าง 2.2 จงหาผลเฉลยของสมการคลื่นกลศาสตร์ 1 มิติ ของเส้นลวดที่ตรึงปลายทั้งสองไว้ และมีโครงแบบเบื้องต้นดังรูป เส้นลวดนี้ถูกจับตรงกลางนิ่งไว้ในตอนแรก แล้วจึงถูกปล่อยให้แกว่งไปมา



วิธีทำ ขั้นแรก เราต้องหาผลเฉลยทั่วไปของสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2.17}$$

เมื่อ v คือความเร็วของการเคลื่อนที่ เป็นค่าคงตัว

เราจะหาผลเฉลยโดยวิธีแยกตัวแปร (เช่นเดียวกับการหาผลเฉลยสมการเฮล์มโฮลทซ์) เริ่มจากสมมุติผลเฉลยให้อยู่ในรูป

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

แทนค่าลงในสมการ (2.17) แล้วหารด้วย XT จะได้

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

กำหนดให้

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-m^2 \qquad [-m^2 : \text{separation constant}]$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}+m^2X=0$$

สมการนี้เหมือนกับสมการ (2.9) ซึ่งมีผลเฉลยคือ

$$X(x)=A\cos(mx)+B\sin(mx)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=-m^2$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}+m^2v^2T=0$$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีฟังก์ชัน $X(x)$ ผลเฉลยของสมการนี้ คือ

$$T(t)=C\cos(mvt)+D\sin(mvt)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการคลื่น 1 มิติ จะเป็น

$$u(x,t)=\left[A\cos(mx)+B\sin(mx)\right]\left[C\cos(mvt)+D\sin(mvt)\right] \tag{2.18}$$

ใช้เงื่อนไขที่ขอบ $u(0,t)=0$

$$u(0,t)=0=\left[A\cos(0)+B\sin(0)\right]\left[C\cos\left(mvt\right)+D\sin\left(mvt\right)\right]$$

จะได้ว่า

$$A=0$$

ใช้เงื่อนไขที่ขอบ $u(l,t)=0$

$$u(l,t)=0=\left[B\sin(ml)\right]\left[C\cos\left(mvt\right)+D\sin\left(mvt\right)\right]$$

จะได้ว่า

$$\sin(ml)=0 \quad \to \quad m_n=\frac{n\pi}{l}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

ผลเฉลยตอนนี้จะเป็น

$$u(x,t)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)\right]$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=0$ หมายถึงความเร็วต้นของเส้นลวดเป็นศูนย์ เนื่องจากมันถูกจับนิ่งไว้ในตอนแรก

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=0&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\left[-C_n\left(\frac{n\pi v}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)+D_n\left(\frac{n\pi v}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)\right]\\&=\left[\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\left[-C_n\left(\frac{n\pi v}{l}\right)\sin(0)+D_n\left(\frac{n\pi v}{l}\right)\cos(0)\right]\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$D_n=0$$

และผลเฉลยตอนนี้จะเป็น

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B'_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right) \qquad \text{โดยที่ } B'_n=B_nC_n$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้นอันสุดท้าย $u(x,0)$ แล้วหาค่าสัมประสิทธิ์ B'_n โดยใช้อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ เช่นเดียวกับในตัวอย่างที่แล้ว

$$\begin{aligned}B'_n&=\frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\\&=\frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2}\frac{2h}{l}x\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx+\int_{l/2}^{l}2h\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx-\int_{l/2}^{l}\frac{2h}{l}x\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right]\\&=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคี่}\end{aligned}$$

ดังนั้น การกระจัดในแนวดิ่งของเส้นลวดมีผลเฉลยเป็น

$$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\odd}}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right)$$

คำแนะนำ จากตัวอย่างทั้งสอง จะเห็นว่า เงื่อนไขที่ขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นที่โจทย์กำหนดมาให้มีความสำคัญในการคำนวณหาค่าของ $A, B, C, \ldots$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวที่อยู่ในผลเฉลยทั่วไป เมื่อเรารู้ค่าของค่าคงตัวเหล่านี้แล้ว เราก็จะสามารถเขียนผลเฉลยสุทธิได้โดยไม่ติดค่าตัวแปรใดเลย ยกเว้นตัวแปรต้นของระบบเท่านั้น (เช่น $x, y, \ldots$)

2.3 สมการสตูร์ม–ลีอูวิลล์ (Sturm–Liouville Equation)

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยส่วนใหญ่ รวมทั้งสมการเชิงอนุพันธ์เฮล์มโฮลทซ์ในระบบพิกัดต่าง ๆ เรา พบว่า ในการหาผลเฉลยด้วยวิธีแยกตัวแปรมักจะนำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีรูปทั่วไปดังนี้

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{du}{dx}\right\}-q(x)u+\lambda\rho(x)u=0 \tag{2.19}$$

โดยที่พารามิเตอร์ λ คือค่าคงตัวการแบ่ง $u(x)$ คือปริมาณใด ๆ เช่น การกระจัด ความร้อน ความเข้มข้น หรือ ฟังก์ชันคลื่น ส่วน $p(x)$, $q(x)$ และ $\rho(x)$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง x ซึ่งเป็นตัวแปรต้นของระบบ สมการ (2.19) นี้เรียกว่า สมการสตูร์ม–ลีอูวิลล์ (Sturm–Liouville Equation) ซึ่งครอบคลุมทั้งปัญหาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue problem) ต่าง ๆ ในวิชากลศาสตร์ควอนตัมและวิชาฟิสิกส์แบบฉบับ ตารางด้านล่างแสดงตัวอย่าง ของสมการซึ่งเป็นคลาสหนึ่งของสมการซตูม–ลิอูวิลล์

สมการ	$p(x)$	$q(x)$	$\rho(x)$	λ
Legendre, $P_n(x)$	$1-x^2$	0	1	$n(n+1)$
Associated Legendre, $P_n^m(x)$	$1-x^2$	$\frac{m^2}{1-x^2}$	1	$n(n+1)$
Laguerre, $L_n(x)$	xe^{-x}	0	e^{-x}	n
Associated Laguerre, $L_n^k(x)$	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$x^k e^{-x}$	$n-k$
Bessel, $J_n(x), Y_n(x), H_n(x), \ldots$	x	$\frac{n^2}{x}$	x	1
Hermite, $H_n(x)$	e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	$2n$
Quantum Oscillator, $\psi_n(x)$	1	x^2	1	λ
Chebyshev, $T_n(x)$	$(1-x^2)^{1/2}$	0	$(1-x^2)^{-1/2}$	n^2
Gegenbauer, $C_n^\alpha(x); \alpha>-1/2$	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$	$n(n+2\alpha)$

รายละเอียดของสมการเหล่านี้ จะอธิบายในบทถัดไปในเรื่องฟังก์ชันพิเศษ

แบบฝึกหัด 2

1. พิจารณาสมการความร้อน 1 มิติ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t}$$

ถ้ากำหนดให้ b^2 เป็นค่าคงตัวการแบ่ง ให้วิเคราะห์ธรรมชาติของผลเฉลยเมื่อ

a) $b^2>0$, b) $b^2=0$, c) $b^2<0$,

d) ถ้าผลเฉลยทั่วไปเขียนอยู่ในรูป $u(x,t)=Ce^{-b^2\sigma t}\left(A\cos bx+B\sin bx\right)$ จงหาผลเฉลยเฉพาะที่ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ $u(0,t)=u(l,t)=0$ และ $u(x,0)=u_0\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right); (0<x<l)$

2. พิจารณาสมการลาปลาซในพิกัดทรงกระบอก

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

จงแสดงว่า

$$u(\rho,\phi,z)=P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

คือผลเฉลยของสมการ เมื่อ

$$Z(z)=Ae^{\sqrt{a}z}+Be^{-\sqrt{a}z}$$

$$\Phi(\phi)=C\cos n\phi+D\sin n\phi$$

และ $P(\rho)$ คือผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho}+\left(a-\frac{n^2}{\rho^2}\right)P=0$$

3. พิจารณาการสั่นของสายยางเส้นหนึ่งที่เบาและยืดหยุ่น ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลาง A และถูกดึงด้วยแรง T เมื่อฉีดของเหลวความหนาแน่น ρ ให้ไหลผ่านสายยางด้วยความเร็ว v จะเกิดการกระจัดตามขวาง (transverse displacement) $u(x,t)$ ของสายยาง ซึ่งสามารถบรรยายด้วยสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\left(v^2-\frac{T}{\rho A}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

จงคำนวณหา $u(x,t)$ ที่ x และ t ใด ๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น ว่าตอนแรกที่ $t=0$ สายยางมีการกระจัดอยู่ในรูป $u(x,0)=a\cos kx$ และมีความเร็วต้นเป็นศูนย์

4. จงแทนค่า $p(x),\ q(x),\ \rho(x)$ และ λ ในตารางหน้า 20 ลงในสมการ (2.19) แล้วจัดรูปสมการ ดังตัวอย่าง

ชื่อสมการ	**สมการ**
Legendre	$(1-x^2)u''-2xu'+n(n+1)u=0$
Associated Legendre	
Laguerre	
Associated Laguerre	
Bessel	
Hermite	
Quantum Oscillator	
Chebyshev	
Gegenbauer	