



หน่วยที่ 8

ฟิสิกส์ยุคใหม่และทฤษฎีควอนตัม

ทฤษฎีสัมพัทธภาพเป็นรากฐานสำคัญของฟิสิกส์ยุคใหม่ เรื่องราวส่วนใหญ่ของทฤษฎีเกี่ยวกับการวัดเวลา (time) และอวกาศ (spaces) เรียกรวมว่า Space - time measurement โดยผู้คิดทฤษฎีสัมพัทธภาพ คือ ไอน์สไตน์ กลศาสตร์ของนิวตันเป็นวิชาที่อธิบายในระบบมหภาค ขณะที่กลศาสตร์ยุคใหม่เป็นวิชาที่อธิบายในระบบจุลภาค และสามารถอธิบายในระบบมหภาคได้ด้วย

8.1 ทฤษฎีสัมพัทธภาพ

8.1.1 สัจพจน์ของไอน์สไตน์

สัจพจน์ของไอน์สไตน์ มี 2 ข้อ ดังนี้

1.กฎต่าง ๆ ของฟิสิกส์สามารถนำมาเขียนในรูปสมการที่มีลักษณะคงที่ในทุก “Inertial Frame of Reference”

2.ความเร็วของแสง (รวมทั้งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทุกชนิด) ในสุญญากาศเป็นค่าคงที่ (c) ไม่ขึ้นอยู่กับสภาวะการเคลื่อนที่ใด ๆ ทั้งสิ้น

อธิบายสัจพจน์ ข้อที่ 1

การแสดงกฎต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ช่วยให้การวิเคราะห์เรื่องราวต่าง ๆ ง่ายขึ้น กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ($F = ma$) สามารถนำมาใช้ได้ ก็ต่อเมื่อเราระบุว่ากรอบใดเป็นกรอบอ้างอิง อย่างเช่น การเคลื่อนที่ของลูกบอล ซึ่งกำลังอยู่บนพื้นรถไฟที่แล่นด้วยความเร็วคงที่ไปทางเหนือ โดยถือเอารถไฟเป็นกรอบอ้างอิง และถ้าจะใช้กฎของนิวตัน $F = ma$ ก็ต่อเมื่อกรอบอ้างอิงเป็นพื้นดิน หรือเครื่องบินซึ่งกำลังบินด้วยความเร็วคงที่ก็ได้ การที่เราจะใช้กรอบใดเป็นกรอบอ้างอิง นั้น กรอบอ้างอิงจะต้องเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่

อธิบายสัจพจน์ ข้อที่ 2

ผลการวัดความเร็วแสงในสุญญากาศจะเหมือนกันหมด ไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วของต้นกำเนิดหรือผู้วัดเลย ซึ่งขัดแย้งกับความรู้สึกในชีวิตประจำวัน เช่น ถ้าเราพิจารณาความเร็วของรถยนต์ 2 คัน แล่นสวนทางกันความเร็วของรถคันที่ 1 เมื่อวัดเทียบกับพื้นดิน (สัมพัทธ์กับพื้นดิน) เท่ากับ 60 กม./ชม. และความเร็วของรถคันที่ 2 เมื่อวัดเทียบกับพื้นดิน (สัมพัทธ์กับพื้นดิน) เท่ากับ 80 กม./ชม. คนบนรถคันใดคันหนึ่งจะวัดความเร็วของรถอีกคันหนึ่งได้ $80+60 = 140$ กม./ชม. แต่แสงกลับ



ไม่เป็นไปตามหลักฟิสิกส์ในชีวิตประจำวันเลย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้จากการทดลองของ Michelson กับ Morley

ข้อสังเกตจากการทดลองของไมเคิลสันและมอร์เลย์ สรุปได้ว่า

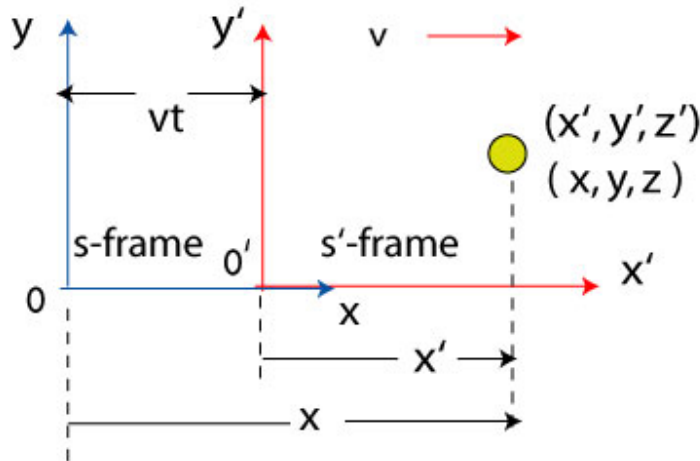
1.การทดลองนี้แสดงว่า แสงเดินทางด้วยความเร็วคงที่ในทุกทิศทุกทาง (c คือความเร็วแสง ในสุญญากาศ มีค่าเท่ากับในอากาศ)

2.ความเร็วแสง c ไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วของการเคลื่อนที่ของผู้วัดหรือการเคลื่อนที่ของต้นกำเนิดแสง

3.Ether ซึ่งสมมุติเป็นตัวกลางของแสงไม่มีอยู่จริง

4.Absolute Frame of Reference ไม่มี คือไม่มีอะไร “นิ่ง สัมบูรณ์” การเคลื่อนที่ทุกชนิด เป็นเรื่องสัมพัทธ์

Galilean Transformation



รูป 8.1

สมมุติให้ s' เป็นเครื่องบิน s เป็นหอคอย v เป็นความเร็วของ s' ซึ่งทั้งสองเป็น Inertial Frame ถ้าตำแหน่ง p เป็นแมลงตัวหนึ่งในเครื่องบิน เวลา $t = t'$ ตำแหน่งวัตถุ p เมื่อเวลา t' คือ กรอบ (x', y', z') ได้จากการวัดของผู้สังเกตการณ์ ใน s' ในขณะเดียวกัน ผู้สังเกตการณ์ใน s จะ วัดได้ว่าขณะนั้นเวลา $= t$ ตำแหน่งคือ (x, y, z) จากรูปจะเห็นได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง Spatial Coordinated

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



และ time Coordinates มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$t' = t$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง Coordinates ที่ใช้ออกเหตุการณ์ เขียนในลักษณะสมการข้างบน เรียกว่า Galilean Coordinate Transformation

$$v_x' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x-vt)}{dt} = v_x - v \quad \dots\dots\dots(8.1)$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt} = v_y \quad \dots\dots\dots (8.2)$$

$$v_z' = \frac{dz'}{dt} = v_z \quad \dots\dots\dots(8.3)$$

สมการทั้งสามคือ Galilean velocity transformation เห็นได้ชัดว่า Galilean transformation มีผลเป็นไปตามสามัญสำนึก และประสบการณ์ในชีวิตประจำวันทุกประการ แต่ถ้า

- (1) นำสมการทั้งสี่ของ Coordinate transformation มาใช้เพื่อเป็นผลการวัดต่างๆ ใน Frame หนึ่งไปเป็นค่าอย่างเดียวกันในอีก Frame หนึ่ง แล้วจะปรากฏว่า สูตรต่างๆ ในวิชาแม่เหล็กไฟฟ้าจะลักษณะไม่เหมือนกัน ใน Frame ทั้งสอง ซึ่งเรื่องนี้ไปขัดกับสัจพจน์ข้อแรกของไอน์สไตน์
- (2) นำ Velocity Transformation มาใช้กับแสงโดยสมมติว่า $v_x = c$ ใน s-Frame เราได้ $v_x' = c - v$ เป็นความเร็วแสงใน s' ซึ่งขัดกับผลการทดลองของ ไมเคิลสัน ซึ่งกล่าว ว่า “ความเร็วแสงเป็นค่าคงที่เป็นที่แน่นอนว่า Galilean Transformation ใช้ไม่ได้ในกรณีที่มีความเร็วสูง ทั้งที่ Galilean Transformation ใช้ได้ในความเร็วต่ำ เราจึงหา Transformation ใหม่มาใช้แทน

8.1.2 การแปลงแบบลอเรนตซ์ (Lorentz Transformation)

ลักษณะของ Transformation ที่จะใช้เป็นหลักในกรณีความเร็วสูงนั้นจะต้องมีสมบัติดังนี้

1. จะเปลี่ยนรูปเป็น Galilean Transformation เมื่อความเร็วลดลงต่ำกว่าความเร็วแสงมาก
2. จะต้องเป็นสมการกำลังหนึ่ง
3. จะต้องมียูนิฟอร์มไม่ยุ่งยาก

เราสมมติให้ Lorentz Transformation มีรูปสมการ

$$x' = k(x - vt)$$



โดย k เป็นค่าคงที่ ไม่ขึ้นกับเวลาและตำแหน่ง แต่จำเป็นจะต้องเป็น function ของความเร็ว และ k จะกลายเป็น 1 เมื่อ $v \ll c$

$$x' = k(x - vt) \quad \dots\dots\dots(8.4)$$

$$y' = y \quad \dots\dots\dots (8.5)$$

$$z' = z \quad \dots\dots\dots (8.6)$$

สมการ (8.4), (8.5), (8.6) เรียกว่า Lorentz Coordinate Transformation Equation

เมื่อพิจารณาในกรอบ s จะได้

$$x = k(x' - vt') \quad \dots\dots\dots (8.7)$$

$$y = y' \quad \dots\dots\dots (8.8)$$

$$z = z' \quad \dots\dots\dots (8.9)$$

โดยที่ k ก็คือค่าคงที่ตัวเดิม แต่ t' คือเวลาวัดใน s' - Frame เครื่องหมาย v จำต้องกลับกับกรณี

แรก เรียกสมการ (8.7), (8.8) และ (8.9) ว่าเป็น Inverse Lorentz Coordinate transformation equation

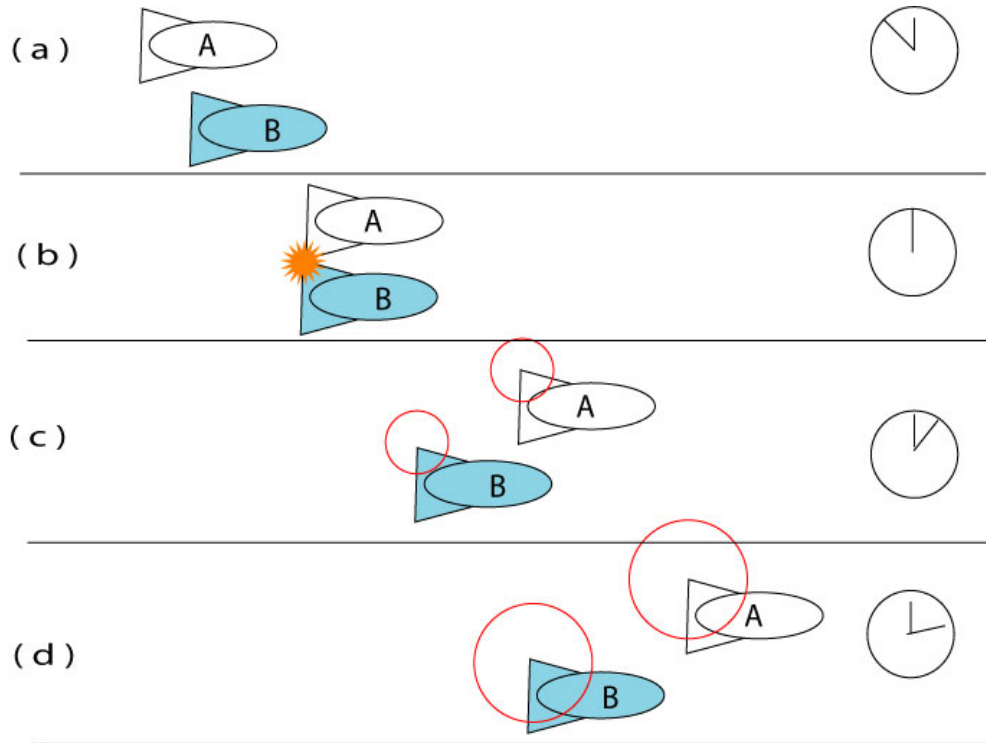
แทนค่า (8.4) ลงใน (8.7)

$$x = k(k(x - vt) + vt')$$

หรือ $x = k^2x - k^2vt + kv t'$

$$t' = kt + x\left(\frac{1 - k^2}{kv}\right) \quad \dots\dots\dots(a)$$

สมการ (8.4) ถึง (8.9) ได้มาจากสัจพจน์ข้อที่ 1 ของไอน์สไตน์ กล่าวคือ ลักษณะของ Transformation เป็นแบบเดียวกันใน s และ s' โดยความแตกต่างที่มึ้นนั้นเป็นเพียงเครื่องหมายของความเร็วเท่านั้น ต่อไปจะเป็นการหาค่า k



รูป 8.2

จากรูป 8.2 ยานอวกาศสองลำสัมผัสกันที่เวลา $t' = t$ ขณะนั้น $x = x'$ เป็นตำแหน่งของ หน้าคลื่น ของแสงที่เกิดจากการสัมผัสกันระหว่างยานอวกาศทั้งสองลำ สัจพจน์ข้อ 2 กล่าวว่า ผู้สังเกตใน s และ s' วัดความเร็วของแสงได้ c เท่ากัน

ในเวลาต่อมา t ใน s ขณะนั้นเป็นเวลา t' ใน s' ตำแหน่งของ Wave front ใน s คือ x และใน s' คือ x'

$$\text{ดังนั้น ใน } s \quad x = ct \quad (8.10)$$

$$\text{และ ใน } s' \quad x' = ct' \quad (8.11)$$

แทนค่า x' จากสมการ (8.4) และ t' จากสมการ (a) ลงในสมการ (8.11)

$$k(x - vt) = c \left(kt + x \left(\frac{1 - k^2}{kv} \right) \right)$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้เป็น

$$x = \frac{k^2 vt(c + v)}{k^2 v - c + ck^2} \quad (8.12)$$



นำสมการ (8.10) ตั้งหารด้วยสมการ (8.12) จะได้

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{ct(k^2v - c + ck^2)}{k^2vct + k^2v^2t} \\ c^2k^2 - k^2v^2 &= c^2 \\ k &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (8.13)$$

k เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา แต่ขึ้นกับความเร็วและเมื่อ $v \ll c$ จะได้ v^2/c^2 มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ แสดงว่า Lorentz Transformation เป็น Galilean transformation เมื่อความเร็วต่ำ เมื่อแทนค่า k ลงในสมการ (a) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง t' และ t

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.14)$$

ดังนั้น สมการ Lorentz Coordinate Transformation ที่สมบูรณ์ทั่วไป สมการมีดังนี้

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.15)$$

$$y' = y \quad (8.16)$$

$$z' = z \quad (8.17)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.18)$$

Inverse Lorentz Coordinate Transformation

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.19)$$

$$y = y' \quad (8.20)$$

$$z = z' \quad (8.21)$$



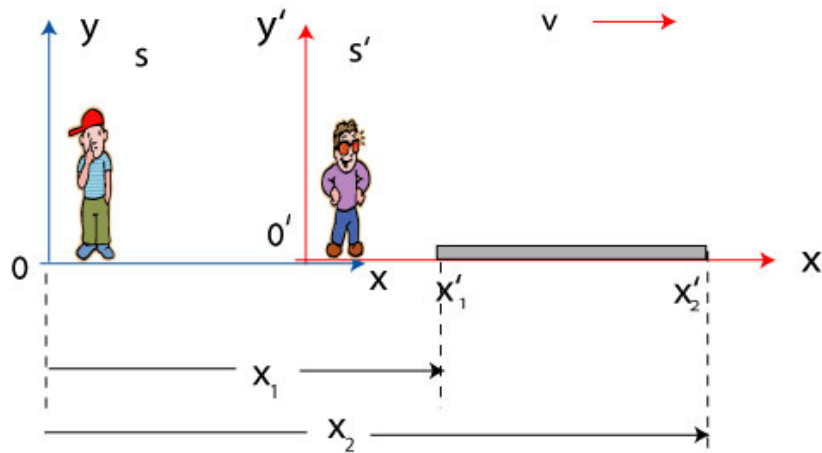
$$t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.22)$$

Relativistic Mechanics

เป็นการพัฒนาทฤษฎีสัมพัทธภาพขึ้นมาจากสัจพจน์ทั้งสองข้อของไอน์สไตน์ ทฤษฎีนี้พัฒนาขึ้นมาว่าด้วย การวัดระยะของ, เวลา , ความเร็ว, มวล, พลังงานและโมเมนตัม ตามลำดับ ซึ่งเป็นเรื่องราวทางกลศาสตร์ จึงเรียกว่ากลศาสตร์สัมพัทธภาพ

Lorentz -Fitzgerald Contraction

ถ้าสิ่งที่ถูกวัดกับผู้วัดไม่ได้เคลื่อนที่สัมพันธ์กัน เช่น ไม่เมตรวางอยู่ต่อหน้า เมื่อผู้วัดนำไม้เมตรมาตรฐานมาเปรียบเทียบกับจะได้ 1 เมตร ไม่ว่าเราจะวัดเมื่อใดก็ตาม ในทฤษฎีสัมพัทธภาพ เรียก Frame of Reference ที่ไม่เคลื่อนที่ เมื่อเทียบกับวัตถุ ว่า “Rest Frame of Reference ความยาวของวัตถุที่วัดได้โดยผู้วัดอยู่ใน Frame เดียวกัน เรียกว่า Rest Length สมมุติว่าไม้ชิ้นหนึ่งมี Rest Length เท่ากับ L_0 วางไม้ดังรูปใน s' Frame โดยปลายทั้งสองอยู่ที่ตำแหน่ง x'_1 และ x'_2 ตามลำดับ



รูป 8.3

$$L_0 = x'_2 - x'_1 \quad L = x_2 - x_1$$

ถ้า s' Frame เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ v เมื่อเทียบกับ s - Frame ดังรูป ผู้สังเกตใน s - Frame จะวัดปลายทั้งสองของไม้ที่อยู่ตำแหน่ง x_1 และ x_2 ในขณะนั้น เวลาใน s - Frame คือ t การวัดตำแหน่งของปลายทั้งสองจะต้องทำในเวลาเดียวกัน เพราะมิฉะนั้นความยาวจะผิดไป เพราะ



วัตถุเคลื่อนที่ตลอดเวลา เมื่อเทียบกับ s - Frame ดังนั้นความหมายที่วัดได้ใน s - Frame เรียกว่า Relativistic Length คือ L

ความสัมพันธ์ระหว่าง x_1 และ x_2 กับ x_1' และ x_2' ในขณะที่เวลาใน s - Frame คือ t หาได้จากสมการ Lorentz Transformation คือ

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$L_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\text{หรือ } L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (8.23)$$

เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความยาวที่วัดได้จริงใน s และ s' - Frame

เนื่องจาก $v < c$ ดังนั้น $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ จึงมีค่าน้อยกว่า 1 เสมอ นั่นคือ $L < L_0$

วัตถุที่เคลื่อนที่จะวัดได้ว่าหดสั้นลง ในแนวการเคลื่อนที่นั้น (ความยาวในแนว y และ Z ไม่เปลี่ยนแปลง) เมื่อผู้วัดกับวัตถุอยู่ต่าง Frame กัน ปรากฏการณ์ เช่นนี้เรียกว่า Lorentz - Fitzgerald Contraction

ตัวอย่าง เช่น ความเร็วของกรอบ s' คือ 1000 ไมล์ / วินาที

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_0} &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(1000 \text{ mi/s})^2}{(186000 \text{ mi/s})^2}} \\ &= 99.985 \% \end{aligned}$$

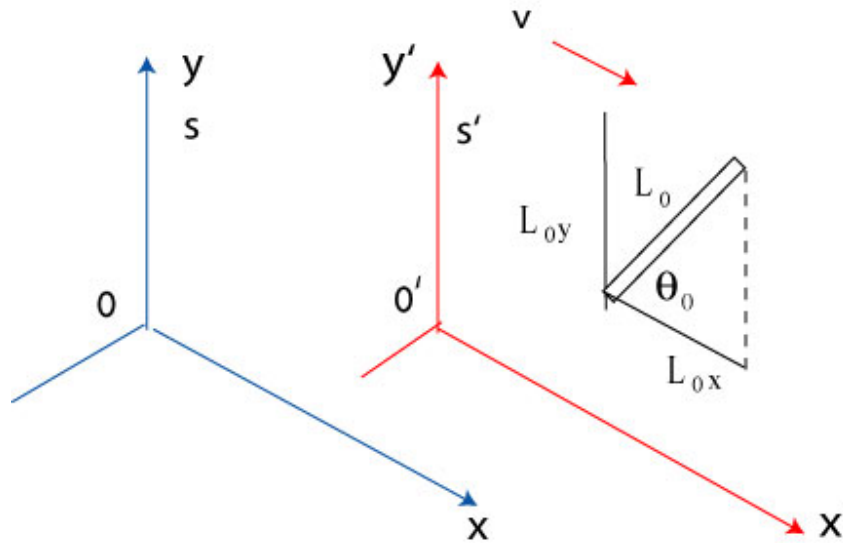
ถ้าความเร็ว ของกรอบ s' มีความเร็วเป็น 90% ของความเร็วแสง

$$\frac{L}{L_0} = \sqrt{1 - \frac{(0.9c)^2}{(c)^2}} = 43.6\%$$



ตัวอย่าง 8.1 สำหรับผู้สังเกตที่อยู่หนึ่งในระบบ s' สังเกตไม้เมตร ความยาว 1 เมตร ทำมุม 45° กับแกน x' ให้คำนวณหาความยาวของไม้เมตรและมุมที่ไม้เมตรทำแกน x เมื่อผู้สังเกตอยู่ในระบบ s เมื่อระบบ s' เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = (\sqrt{3}/2)c$ สัมพันธ์กับ s ตามแกน xx'

วิธีทำ ให้ความยาวของไม้เมตรเมื่อหยุดนิ่งสัมพันธ์กับ s' คือ L_0 ต้องหาองค์ประกอบ L_{0x} และ L_{0y} ดังแสดง



รูป 8.4

$$L_{0x} = L_0 \cos \theta_0$$

และ $L_{0y} = L_0 \sin \theta_0$

องค์ประกอบของ L_0 ในแนวเดียวกับ v จะหดสั้นลง เมื่อสังเกตจากระบบ s

$$L_x = L_{0x} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ดังนั้น ผู้สังเกต s เห็นความยาวไม้เมตรเป็น $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$

$$L = \sqrt{(L_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})^2 + (L_0 \sin \theta_0)^2}$$



แทนค่า $L_0 = 1 \text{ m}$, $\theta_0 = 45$ องศา และ $v = (\sqrt{3}/2)c$ จะได้

$$L = 0.625 \text{ m}$$

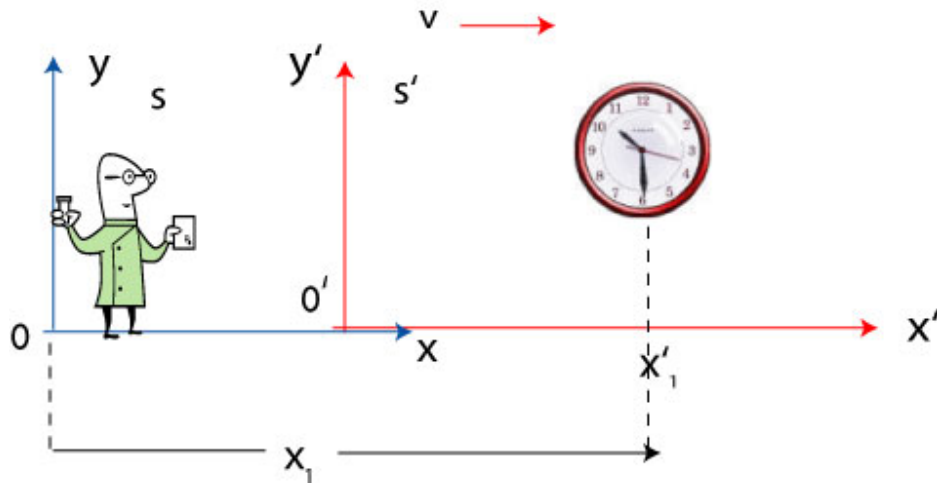
พิจารณา

$$\tan \theta = \frac{L_y}{L_x} = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= 2$$

จะได้ $\theta = 63^\circ 27'$

8.1.4 การยืดของเวลา (Time Dilation)



รูป 8.5

สมมุติในเวลาต่อมา ในขณะที่เขามองเห็นเวลาใน s' เป็น t'_1 นั้น นาฬิกามาตรฐาน s ซึ่ที่ t_1 ความสัมพันธ์ระหว่าง t'_1 กับ t_1 คือ

$$t_1 = \frac{t'_1 - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ต่อมาอีกช่วงเวลาหนึ่ง สมมุติขณะนั้น เป็นเวลา t'_2 ใน s' และเป็นเวลา t_2 ใน S

$$t_2 = \frac{t'_2 - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



ช่วงในเวลา s' - Frame คือ $t'_2 - t'_1$ เรียกว่า Rest time ช่วงเวลา $t_2 - t_1$ เรียกว่า Relativistic Time เพราะอยู่ต่าง Frame กัน

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.24)$$

$v \ll c$ ดังนั้น $t_2 - t_1 > t'_2 - t'_1$ นาฬิกาใน s' เดินช้ากว่านาฬิกาใน s

ตัวอย่าง 8.2 อนุภาค mu-meson เป็นอนุภาคชนิดหนึ่ง ถ้าอยู่กับที่วัดอายุได้ 2×10^{-6} วินาที ถ้าวัดอนุภาคนี้เมื่อเคลื่อนที่เข้ามาในบรรยากาศของโลกได้ความเร็วสัมพัทธ์กับโลก 2.999×10^8 เมตร/วินาที และอนุภาคชนิดนี้จะสลายตัวหมดอายุใน ระยะทางประมาณ 10 กิโลเมตร จงหา

- (1) อายุของอนุภาคที่เคลื่อนที่
- (2) ระยะทางบนพื้นโลกที่อนุภาคเคลื่อนที่ผ่าน

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (1) \text{ อายุของอนุภาคที่เคลื่อนที่ } t = t_2 - t_1 &= \frac{s}{v} = \frac{10 \times 10^3 \text{ m}}{2.999 \times 10^8 \text{ m/s}} \\ &= 31.7 \times 10^{-6} \text{ วินาที} \end{aligned}$$

อายุอยู่นิ่ง คือ 2×10^{-6} วินาที (อายุที่วัดได้เมื่ออนุภาคนี้อยู่นิ่งสัมพัทธ์กับผู้วัดเรียกว่า $t_0 = t'_2 - t'_1$)

$$\begin{aligned} t &= \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(2.999 \times 10^8)^2}{c^2}}} \\ &= 31.7 \times 10^{-6} \text{ วินาที} \end{aligned}$$

- (2) ในแง่ของระยะทางบนพื้นโลกที่อนุภาคเคลื่อนที่ผ่าน



ถ้า mu-meson สามารถวัดระยะทางได้ ระยะทางที่ mu-meson วัดได้ ใน Frame of Reference ของตัวมันเองก็คือ ผลคูณของความเร็วสัมพัทธ์กับโลกกับอายุของ mu-meson ใน Frame ของตนเอง

ระยะนี้ คือ Relativistic Length

$$\begin{aligned} L_0 &= v t_0 \\ &= 2.999 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \text{ m} \\ &= 600 \text{ m โดยประมาณใน mu-meson Frame} \end{aligned}$$

แต่ในระยะทางนี้ คือระยะทางบนพื้นโลกประมาณ 10 กิโลเมตร (L_0) ซึ่งเป็น Rest Length เพราะระยะทางนี้ เป็นความยาวของพื้นดิน ซึ่งอยู่นิ่งใน Frame ของโลก

$$\begin{aligned} L &= L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= 10 \times 10^3 \sqrt{1 - \frac{(2.999 \times 10^8)^2}{c^2}} \\ &= 600 \text{ เมตร โดยประมาณ} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8.3 ผู้สังเกตบนโลกสังเกตเห็นรถยนต์เคลื่อนที่ไปได้ 1 กิโลเมตรในเวลา 50 วินาที บนถนนสายตรง สำหรับผู้สังเกตในยานอวกาศซึ่งเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับโลกด้วยอัตราเร็ว $0.95c$ จะเห็นรถยนต์เคลื่อนที่ไปได้ระยะทางเท่าใด เมื่อใช้นาฬิกาของเขาจับเวลาการเคลื่อนที่ของรถยนต์ โดยที่ความเร็วของยานอวกาศนี้ (v) ตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์และ (x) อยู่ในแนวเดียวกันกับการเคลื่อนที่ของรถยนต์

วิธีทำ เวลา t_0 คือ 50 วินาที

$$\begin{aligned} t &= \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{50}{\sqrt{1 - (0.95)^2}} \\ &= 3.2 \times 50 = 160 \text{ วินาที} \end{aligned}$$

(ก) ไม่มีการหดของความยาวสำหรับระยะทางที่รถเคลื่อนที่ ถ้าความเร็วของยานอวกาศมีทิศ ตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์ แต่ผู้สังเกตในยานอวกาศจะเห็นว่ารถยนต์ต้องใช้เวลา 160 วินาที จึงจะเคลื่อนที่ไปได้ 1 km

(ข) ถ้ายานอวกาศเคลื่อนที่ในแนวเดียวกันกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์ จะมีการหดตัวของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ไปได้ คือ



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 1/3.2 = 0.31 \text{ km}$$

ดังนั้น สำหรับผู้สังเกตในยานอวกาศ จะสังเกตเห็นรถยนต์เคลื่อนที่ได้เพียง 0.31 กม. ในเวลา 160 วินาที กล่าวคือ จะเคลื่อนที่ 1 km ในเวลา 517 วินาที

8.1.5 สมมูลย์ระหว่างมวลและพลังงาน

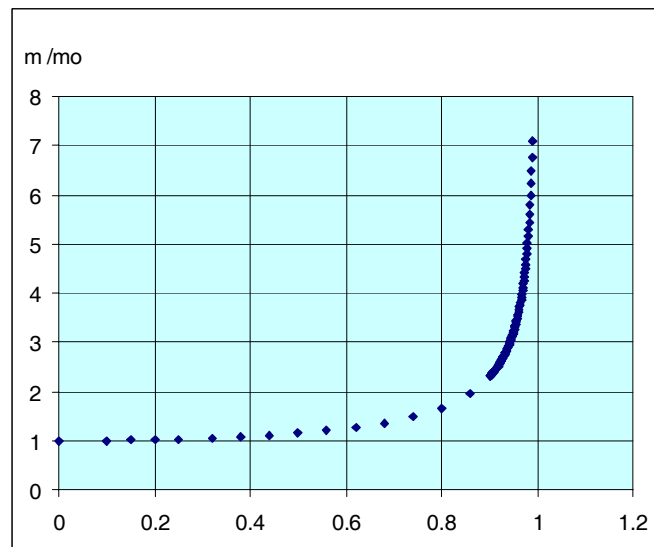
มวลเป็นปริมาณมูลฐานทางฟิสิกส์ เช่นเดียวกับระยะทางและเวลา การวัดมวลใน Rest Frame กับการวัดใน Moving Frame ปรากฏว่ามีลักษณะเช่นเดียวกับการวัดเวลา กล่าวคือ

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

เมื่อ m_0 = rest mass คือ มวลที่วัดได้เมื่อผู้วัดอยู่ใน Rest Frame of Reference

m = relativistic mass คือ มวลที่วัดได้เมื่อผู้วัดอยู่ใน Moving Frame of Reference

$m \geq m_0$ สามารถแสดงสภาพการเปลี่ยนของมวลเมื่อความเร็วมีค่าต่างๆ ได้ดังรูป ซึ่งแสดงว่ามวลเป็น dependent variable ขึ้นอยู่กับความเร็วซึ่งเป็น independent variable



รูป 8.6

**การสังเกตจากกราฟ จะได้ว่า**

1. มวลที่วัดได้ไม่คงที่ เปลี่ยนไปตามความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างมวลกับผู้วัด
2. ความสัมพันธ์ระหว่างมวลกับความเร็วไม่ใช่ linear แต่เป็นเส้นโค้ง
3. ในกรณีที่มวลมีความเร็วต่ำ $m = m_0$
4. ในกรณีที่ v มีค่าเข้าใกล้กับความเร็แสง มวล m มีขนาดเข้าสู่อนันต์

ถ้าเรานำผลที่ได้จากทฤษฎีสัมพัทธภาพมาใช้กับกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{d}{dt}(mv) \\
 &= v \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + ma
 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า F ไม่เท่ากับ ma เพราะมวลจะเปลี่ยนไปได้เมื่อความเร็วเปลี่ยนแต่ $F = ma$ ยังคงใช้ได้ ในกรณีความเร็วต่ำอยู่ตามเดิม เพราะในบริเวณที่ความเร็วต่ำนั้นค่าของมวลเกือบคงที่

ตัวอย่าง 8.4 วัตถุมวล 63 kg บนพื้นโลก ถ้ายิงออกไปนอกโลกด้วยความเร็วคงที่ $= 0.998c$ คนบนโลกจะวัดมวลของวัตถุชิ้นนี้ได้กี่โลกรัม

วิธีทำ มวลบนพื้นโลกวัดได้ 63 kg เมื่อผู้วัดอยู่บนโลกจึงเรียกว่า rest mass $= m_0 = 63$ kg

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{63}{\sqrt{1 - \frac{(0.998c)^2}{c^2}}} \\
 &= 1000 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 8.5 โปรตอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าใด มวลของโปรตอนจึงเป็นสองเท่าของมวลนิ่ง

วิธีทำ กำหนดให้ $m = 2 m_0$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 v &= 0.866c
 \end{aligned}$$



ในที่นี้จะศึกษาแต่พลังงานจลน์กับพลังงานรวม (Total Emery) เราจะพิจารณาพลังงานศักย์ (ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่ง)

การที่วัตถุมีพลังงานจลน์เพิ่มขึ้นก็เพราะได้รับงานจากภายนอก งานนี้สมมุติว่าเกิดมาจากแรง F มากกระทำกับวัตถุนั้น สมมุติว่าในช่วงระยะทางสั้น ๆ $= ds$ มีแรง F มากกระทำกับวัตถุในแนว ds งานที่เกิดจากแรงนี้คือ Fds หายไปเป็นส่วน ที่เพิ่มขึ้นของพลังงานจลน์ dE_k ของวัตถุนั้น

$$dE_k = Fds$$

สมมุติว่าเมื่อเริ่มต้นใน S วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง $s = 0$ มีความเร็ว $v = 0$ จึงมีพลังงานจลน์ $E_k = 0$ แต่ต่อมาหลังจากการกระทำของแรง F วัตถุเคลื่อนที่ถึงตำแหน่ง $= s$ ความเร็ว $= v$ และมีพลังงานจลน์ขณะนั้นเป็น E_k

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน $F = \frac{d}{dt}(mv)$

$$dE_k = \left\{ \frac{d}{dt}(mv) \right\} ds = \frac{ds}{dt} d(mv)$$

$$= vd(mv) = v(vdm + m dv)$$

$$= v^2 dm + mv dv \quad \dots\dots\dots(1)$$

แต่ $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$mc^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$$

โดยคิดว่า m และ v อาจเปลี่ยนแปลงได้ แต่ $c =$ คงที่ จึงหา differentials ทั้งสองข้างของสมการได้เป็น

$$2mc^2 dm = 2mv^2 dm + 2m^2 v dv$$

หารด้วย $2m$ ได้

$$c^2 dm = v^2 dm + mv dv \quad \dots\dots\dots(2)$$

จะเห็นว่าสมการ (1) และสมการ (2) มีด้านขวามือเท่ากัน



$$dE_k = c^2 dm$$

เมื่อแรกเริ่มใน s วัตถุมี $v=0$ $E_k = 0$ และ $m = m_0$ ก่อนเมื่อถูกแรง F กระทำจะมีความเร็วโต ๆ v พลังงานจลน์ E_k และมวล m โดยวิธี Integrates สมการข้างบนนี้อาจหาพลังงานจลน์ของวัตถุได้คือ

$$E_k = \int_0^{E_k} dE_k = c^2 \int_{m_0}^m dm = c^2(m - m_0)$$

$$mc^2 = E_k + m_0c^2 \dots\dots\dots(8.26)$$

สมการนี้เป็นสมการพลังงาน ดังนั้น mc^2 จึงเป็นพลังงานทั้งหมดของวัตถุซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกคือ พลังงานจลน์ E_k และส่วนหลังคือ m_0c^2 ซึ่งหมายถึงพลังงานที่มีอยู่ในตัววัตถุอันเนื่องมาจากมวลส่วนที่อยู่กับที่นั่นเอง จึงเรียกชื่อว่า "Rest Energy" ของวัตถุนั้น แสดงว่ามวลสามารถเปลี่ยนเป็นพลังงานได้ แม้ว่าจะอยู่นิ่ง ๆ ใน Frame นั้น ให้ E แทน Total Energy และ E_0 แทน Rest Energy

$$E = E_k + E_0$$

โดยที่ $E = mc^2$ และ $E_0 = m_0c^2$

เนื่องจาก $m > m_0$ เสมอดังนั้น $E > E_0$

ในกรณีความเร็วต่ำ $v \ll c$ เทอม v/c จะมีค่าเข้าสู่ศูนย์

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0c^2$$

$$= m_0c^2 \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

อาศัยทฤษฎีบททวินามกระจายอนุกรมเทอมที่ยกกำลัง $-(1/2)$ จะได้

$$= m_0c^2 \left(\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2$$



ตัวอย่าง 8.6 จงคำนวณหา rest energy ของ electron เป็นหน่วย Joule และหน่วย electron Volt โดยกำหนด rest mass ของ electron เท่ากับ 9.11×10^{-31} kg

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad E_0 &= m_0 c^2 \\
 &= (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\
 &= 8.2 \times 10^{-14} \text{ J} \\
 &= 0.51 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

8.2 ทฤษฎีควอนตัมเบื้องต้น

ก่อน ค.ศ. 1900 นักวิทยาศาสตร์เชื่อว่าความรู้ทางฟิสิกส์ที่มีอยู่สามารถนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติได้ครอบคลุมทั้งหมด ทั้งทางด้านสสารและพลังงาน ทางด้านสสารสามารถใช้อธิบายของนิวตันอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคตั้งแต่ระดับอิล็กตรอนจนถึงดวงดาว ทางด้านพลังงานมีทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ ซึ่งใช้อธิบายสมบัติของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าได้ครบถ้วน ต่อมาเมื่อนักวิทยาศาสตร์ได้ศึกษาปรากฏการณ์ต่าง ๆ ลึกลงไปถึงระดับจุลภาค เช่นระดับอะตอม นิวเคลียสหรือเล็กกว่านี้ พบว่าความรู้กฎเกณฑ์ที่มีอยู่ไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์เหล่านั้นได้ครบถ้วนสมบูรณ์ จึงมีการตั้งกฎเกณฑ์ใหม่ ๆ ขึ้นมา ทฤษฎีควอนตัมเป็นทฤษฎีหนึ่งซึ่งตั้งขึ้นเพื่อใช้อธิบาย ทำนาย และแสดงความสัมพันธ์ของปรากฏการณ์ธรรมชาติในระดับเล็ก ๆ

8.2.1 การแผ่รังสีของวัตถุดำ (Black body radiation)

ปรากฏการณ์การแผ่รังสีของวัตถุดำเป็นปรากฏการณ์หนึ่งซึ่งไม่สามารถใช้ทฤษฎีหรือกฎต่าง ๆ ในฟิสิกส์ยุคเก่าอธิบายได้ วัตถุดำหมายถึงวัตถุที่สามารถแผ่หรือดูดกลืนรังสีได้ทุกความถี่ ได้แก่ วัตถุที่มีอุณหภูมิสูงมาก ๆ ดวงอาทิตย์แผ่รังสีเกือบทุกความถี่ อนุโลมว่าเป็นวัตถุดำได้

กฎเกี่ยวกับการแผ่รังสี

สมมติว่าวัตถุดำชิ้นหนึ่งแผ่รังสีออกมาทุกความถี่ ต้องการหาการกระจายของความถี่ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ ว่าวัตถุดำจะแผ่รังสีแต่ละความถี่ได้มากน้อยเพียงใด ถ้าเรารู้จำนวนแบบ (mode) การสั่นสะเทือนของคลื่นและพลังงานของการสั่นสะเทือนของแต่ละแบบ เราก็สามารถหาการกระจายของความถี่ (frequency distribution) ได้

จากการศึกษาในวิชาทฤษฎีสถิติพบว่าความน่าจะเป็นของค่าพลังงานซึ่งเกิดจากการสั่นสะเทือนจะมีค่าอยู่ในช่วง E ถึง $E + dE$ จะเป็นฟังก์ชันอยู่ในรูป $e^{-E/k_B T} dE$



พลังงานเฉลี่ยของการสั่นสะเทือนแต่ละแบบ คือ

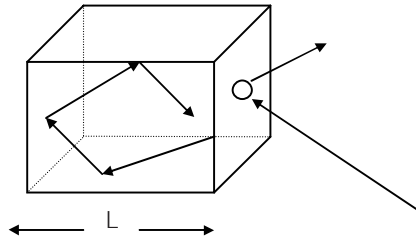
$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/k_B T} dE}$$

อาศัยการอินทิเกรตบางส่วน (Integrating by part) จะได้

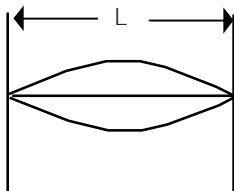
$$\bar{E} = k_B T \dots\dots\dots (8.27)$$

เมื่อ T คืออุณหภูมิมีหน่วยเป็นเคลวิน k_B คือค่าคงที่ของโบลซ์มานน์

การหาจำนวนแบบของการสั่นสะเทือน พิจารณาจากการสมมติว่ามีกล่องใบหนึ่งถูกทำให้ร้อน มีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสะท้อนแผ่ออกมา กล้องนี้จะอยู่ในภาวะสมดุลทางความร้อน เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ถูกแผ่ออกมาและถูกดูดกลืนเข้าไปในกล่องมีค่าเท่ากัน อาจเปรียบเทียบได้ว่าคลื่นที่สะท้อนกลับไปกลับมาในกล่องเป็นคลื่นนิ่ง (Standing wave)



รูป 8.7 การสะท้อนของคลื่นในกล่อง



รูป 8.8 การเกิดคลื่นนิ่ง n = 1

-จากการศึกษาสมบัติของคลื่นนิ่ง ความยาวคลื่น (λ)
จำนวนรอบของคลื่น(n)

ความยาวของกล่อง(L) หาได้จาก

$$n = 2L/\lambda$$

กำหนดให้ k คือเลขคลื่น (Wave number)

$$k = 2\pi f/c$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

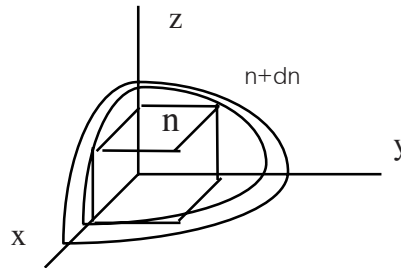


เมื่อ f คือความถี่ของคลื่น λ คือความยาวคลื่น

เงื่อนไขที่ทำให้เกิดคลื่นนิ่งในกรณีที่เป็น 3 มิติคือ

$$\begin{aligned} 2\pi n_x &= k_x L \\ 2\pi n_y &= k_y L \\ 2\pi n_z &= k_z L \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8.28)$$

รูป 8.9 การหาจำนวนคลื่นในช่วง $dn + n$



ตรงจุด n จะได้

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

ปริมาตรที่อยู่ระหว่างทรงกลมรัศมี $n + dn$ คือ $4\pi n^2 dn$ ซึ่งปริมาตรเท่านี้จะมีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเท่ากับ $4\pi n^2 dn$ คลื่นด้วย จากสมการ (8.28) เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้างแล้วนำมารวมกันจะได้

$$\begin{aligned} 4\pi^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) &= (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)L^2 \\ k &= \frac{2\pi n}{L} \\ dk &= \frac{2\pi dn}{L} \end{aligned}$$

จำนวนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในปริมาตรระหว่าง n และ dn จะมีค่าเป็น $\frac{L^3 k^2 dk}{2\pi^2}$ คลื่น

เพราะคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นคลื่นตามขวาง ทิศทางการโพลาไรซ์จะมีอยู่ 2 ทิศทาง จำนวนแบบ (mode) ของการสั่นสะเทือนในช่วง k ถึง $k + dk$

$$\text{mode} = \frac{2L^3 k^2 dk}{2\pi^2}$$

ในฟิสิกส์ยุคเก่า บอกว่าการสั่นสะเทือนของแต่ละแบบจะมีพลังงานเท่ากับ $k_B T$ ดังนั้น ในช่วงความถี่ f ถึง $f + df$ จะมีพลังงานเท่ากับ u_f u_f คือความหนาแน่นพลังงาน/ปริมาตรในช่วงความถี่ดังกล่าว



$$u_r df = \frac{(k_B T) 2k^2 dk}{2\pi^2} \dots\dots\dots (8.29)$$

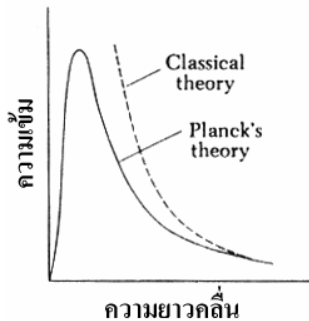
แทนค่า $k = 2\pi f / c$ และ $dk = 2\pi df / c$ สมการ (6.3) จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$u_r df = \frac{8\pi f^2 k_B T df}{c^3} \dots\dots\dots (8.30)$$

เรียกสมการ (8.30) ว่าเป็นกฎการแผ่รังสีของเรลห์และจิ้นส์ (Rayleigh - Jeans radiation law) สมการนี้ชี้ให้เห็นว่าที่อุณหภูมิคงที่ค่าหนึ่ง พลังงานที่ได้จากการแผ่รังสีจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ถ้าคลื่นมีความถี่สูง พลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่แผ่ออกมาจะมีค่ามาก ถ้าวัตถุดำแผ่รังสีออกมาทุกค่าความถี่ พลังงานทั้งหมดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่แผ่ออกมาจะมีค่ามหาศาล จนประมาณมิได้ดังสมการ

$$\int_0^\infty u_r df = \infty \dots\dots\dots (8.31)$$

แต่ผลจากการทดลองพบว่าเส้นกราฟของพลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรที่ทุกๆ ความถี่ที่วัตถุดำแผ่ออกมาตรงบริเวณความถี่ของรังสีเหนือม่วงจะไม่สอดคล้องกับกฎของเรลห์และจิ้นส์ ทำนายไว้ ดังรูป 8.10



รูป 8.10 ความไม่สอดคล้องกันของผลการทดลอง และกฎของเรลห์และจิ้นส์

ผลการทดลองที่ขัดแย้งกับคำทำนายนี้เรียกว่า ความผิดพลาดตรงบริเวณรังสีเหนือม่วง (Ultraviolet Catastrophe) นั่นคือ กฎของเรลห์และจิ้นส์ ใช้อธิบายปรากฏการณ์การแผ่รังสีของวัตถุดำได้เฉพาะตรงบริเวณที่อุณหภูมิต่ำและความถี่ซึ่งต่ำกว่าความถี่ของรังสีอัลตราไวโอเล็ต

นักวิทยาศาสตร์สมัยนั้นไม่สามารถหาคำตอบได้ว่าความผิดพลาดนี้เกิดมาจากข้อบกพร่องตรงจุดใด

นอกจากนี้ยังมีกฎอื่น ๆ ที่กล่าวถึงการแผ่รังสีของวัตถุดำ ได้แก่

กฎของสตีฟาน (Stefan's law) ซึ่งกล่าวไว้ว่า พลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของทุก ๆ ความถี่ที่แผ่ออกมาจากวัตถุดำจะแปรผันตรงกับกำลังสี่ของอุณหภูมิ



$$u = e\sigma T^4 \dots\dots\dots (8.32)$$

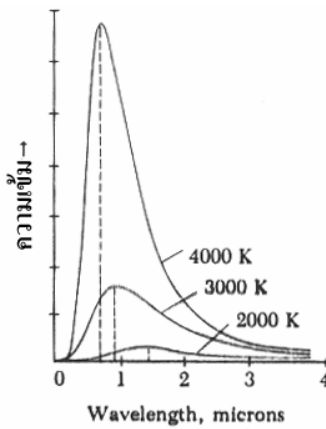
เมื่อ σ คือค่าคงที่ของสตีฟาน = 5.67×10^{-8} วัตต์/เมตร²·เคลวิน⁴)

e คือความสามารถในการแผ่รังสี ถ้าเป็นวัตถุดำจะมีค่าเท่ากับ 1

กฎของวิน (Wein's law) กล่าวว่าวัตถุทุกชิ้นที่มีอุณหภูมิสูงกว่าองศาสมบูรณ์จะมีการแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาเสมอเมื่อวัตถุมีอุณหภูมิต่ำ รังสีส่วนใหญ่ที่แผ่ออกมามีความถี่อยู่ในย่านที่ตามนุษย์มองไม่เห็น เมื่อวัตถุนั้นมีอุณหภูมิสูงขึ้นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาได้มากที่สุดจะมีความถี่สูงขึ้นและความถี่จะสูงขึ้นเรื่อย ๆ ถ้าเพิ่มอุณหภูมิขึ้นไปอีก ให้ λ_{max} เป็นความยาวคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาได้มากที่สุด ณ ที่อุณหภูมิหนึ่ง ๆ T คืออุณหภูมิของวัตถุเป็นองศาสมบูรณ์ กฎของวินเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\lambda_{max}T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ เมตร}\cdot\text{เคลวิน} \dots\dots\dots (8.33)$$

เส้นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาได้ และปริมาณที่แผ่ออกมาจะเป็นดังรูป 6.5



รูป 8.12 เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น ความถี่ที่วัตถุดำแผ่ออกมาได้มากที่สุด จะเลื่อนไปสู่ค่าความยาวคลื่นที่น้อยลง

8.2.2 สมมติฐานของพลังค์

ในปี ค.ศ. 1901 แมกซ์ พลังค์ (Max Planck) ได้ศึกษาการแผ่รังสีของวัตถุดำและพยายามหาสาเหตุของความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในกฎเรลห์และจิ้นส์ พลังค์ได้เสนอว่าอนุภาค



ไฟฟ้าที่สั้นสะเทือนส่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกมานั้น พลังงานที่ส่งออกมาจะมีค่าเพียงบางค่า มีลักษณะไม่ต่อเนื่อง เป็นก้อนพลังงาน (quantum of energy) พลังงานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาแต่ละความถี่คือ

$$\epsilon = hf \quad \dots\dots\dots (8.34)$$

เมื่อ h คือค่าคงที่ของพลังค์ $= 6.63 \times 10^{-34}$ จูล·วินาที

f คือความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมา

เมื่อพลังงานมีค่าไม่ต่อเนื่อง พลังงานเฉลี่ยของการสั้นสะเทือนแต่ละแบบคือ

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon e^{-n\epsilon/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/k_B T}} \quad \dots\dots\dots (8.35)$$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ϵ จะอยู่ชิดกันมากจนถือได้ว่ามีค่าเกือบต่อเนื่อง อาศัยการกระจาย

ของอนุกรม เมื่อกำหนดให้ $x = e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{(1-x)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon x^n = \epsilon x (1 + 2x + 3x^2 + \dots)$$

$$= \frac{\epsilon x}{(1-x)^2}$$

$$\text{แทนค่า } x = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/k_B T} - 1}$$

กระจายเทอมเอ็กซ์โพเนนเชียลให้อยู่ในรูปอนุกรม

$$\approx \frac{\epsilon}{\left(1 + \frac{\epsilon}{k_B T} + \dots\right) - 1}$$

สมการ (6.9) จะกลายเป็น

$$\bar{E} \cong k_B T$$

สอดคล้องกับที่หาได้จากสมมติฐานเดิมที่พลังงานที่แผ่ออกมามีค่าต่อเนื่อง



ความหนาแน่นของพลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร เมื่อใช้สมมติฐานของพลังค์พบว่ามีความเป็น

$$u_f df = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} df \quad \dots\dots\dots (8.36)$$

เมื่อนำไปพล็อตกราฟระหว่าง u_f และ f เส้นกราฟที่ได้จะสอดคล้องกับผลการทดลองพอดี

$$\int_0^\infty u_f df = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{f^3 df}{e^{hf/k_B T} - 1}$$

$$= \sigma T^4$$

เมื่อ $\sigma = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3}$ ซึ่งตรงกับกฎของสตีฟานได้ทำนายไว้

เมื่อให้อุณหภูมิคงที่ หาความถี่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่ออกมาได้มากที่สุด นั่นคือ

$$\frac{du_f}{df} = 0 \quad \text{จะได้}$$

$$T = 0.2131 \frac{h}{k_B} f_m$$

ซึ่งสอดคล้องกับกฎของวินที่ว่าผลคูณของอุณหภูมิสมบูรณ์กับความยาวคลื่นที่แผ่ออกมาได้มากที่สุดมีค่าคงที่

จะเห็นว่าสมมติฐานของพลังค์ที่กล่าวถึงพลังงานในลักษณะที่มีค่าไม่ต่อเนื่องนี้สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์แผ่รังสีได้สอดคล้องกับผลการทดลอง และสอดคล้องกับกฎต่าง ๆ ในฟิสิกส์ยุคเก่า เป็นสมมติฐานที่เปิดศักราชของฟิสิกส์ยุคใหม่ และเป็นที่มาของวิชาทฤษฎีควอนตัม

ตัวอย่าง 8.6 ความหนาแน่นพลังงานต่อปริมาตรที่ได้จากสมมติฐานของพลังค์ (u_f) คือ

$$u_f = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1}$$

จงแสดงว่าเมื่อ $\frac{hf}{k_B T}$ มีค่าน้อยกว่าหนึ่งมาก ๆ สมการนี้จะสอดคล้องกับกฎของเรลห์

และจันส์

วิธีทำ เมื่อกระจาย e^x เป็นอนุกรมจะได้

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

จากสมการความหนาแน่นพลังงานต่อปริมาตร กระจายเทอม $e^{hf/k_B T}$ ให้อยู่ในรูปอนุกรม



$$u_f(T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{hf}{k_B T} + \frac{1}{2} \left(\frac{hf}{k_B T} \right)^2 + \dots \right) - 1 \right]}$$

เพราะ $\frac{hf}{k_B T}$ มีค่าน้อยมาก เทอมยกกำลังสองจึงตัดทิ้งได้ จะได้

$$u_f = \frac{8\pi hf^3}{c^3} k_B T$$

เหมือนกับสมการของเรลห์และจิ้นส์ สมการที่ (8.30)

ตัวอย่าง 8.7 จากตัวอย่าง 8.6 จงแสดงว่าความหนาแน่นพลังงานที่แผ่ออกมาจากวัตถุดำที่ทุกค่าความถี่จะเป็นไปตามกฎของสตีฟาน

วิธีทำ วัตถุดำแผ่รังสีทุกความถี่ตั้งแต่ 0 ถึง ∞

ความหนาแน่นของพลังงานที่ได้จากทุกความถี่

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\infty} u_f df \\ &= \int_0^{\infty} \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{df}{(e^{hf/k_B T} - 1)} \end{aligned}$$

เปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $x = \frac{hf}{k_B T} \quad dx = \frac{h}{k_B T} df$

สมการจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} u &= \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} dx \end{aligned}$$

จากอนุกรมเลขคณิต

$$\frac{1}{1-n} = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

$$u = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx$$

$$u = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} x^3 e^{-sx} dx$$



จากสูตรของ Gamma function

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n)$$

$$= (n-1)!$$

หรือ

$$\frac{1}{s^n} \int_0^{\infty} e^{-sx} (sx)^{n-1} dx = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

$$= \frac{3!}{s^4}$$

$n = 4$ เพราะเมื่อเทียบกับตัวแปรในสมการจะได้

$$(sx)^3 = (sx)^{n-1}$$

จึงได้ $n = 4$

ผลลัพธ์ของการอินทิเกรตจะได้

$$U = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3!}{s^4}$$

แต่ $\sum \frac{1}{s^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$

แทนค่า $\sum \frac{1}{s^4}$ จะได้

$$U = \frac{8\pi k_B^4}{15h^3 c^3} T^4$$

ตรงกับสูตรซึ่งสตีฟานหาไว้ในสมการ (8.36)

สมมติฐานของพลังค์สามารถนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์อื่นๆ ซึ่งทฤษฎีฟิสิกส์ยุคเก่าไม่สามารถอธิบายได้ถูกต้องอีกหลายปรากฏการณ์ดังที่จะกล่าวต่อไป

8.3 ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก (Photoelectric effect)

ค.ศ. 1887 เฮิร์ตซ์ (Hertz) ได้ทดลองฉายรังสีอุลตราไวโอเล็ตไปกระทบบนผิวโลหะ พบว่าเกิดอิเล็กตรอนอิสระที่โลหะนั้น เรียกอิเล็กตรอนนี้ว่า โฟโตอิเล็กตรอน เมื่อเฮิร์ตซ์เปลี่ยนความถี่ของแสงที่ฉายตกกระทบบนโลหะพบว่า เมื่อลดความถี่ของรังสีให้น้อยลงถึงค่าหนึ่งซึ่งพอดีที่จะทำให้อิเล็กตรอนในอะตอมหลุดเป็นอิสระได้ ถ้าความถี่น้อยกว่าค่านี้จะไม่เกิดโฟโตอิเล็กตรอนขึ้น ความถี่นี้เรียกว่าความถี่ขีดเริ่ม (threshold frequency) เมื่อเพิ่มความถี่ให้สูงขึ้น พบว่าโฟโตอิเล็กตรอนจะมีพลังงานมากขึ้น ถ้าเพิ่มปริมาณความเข้มของรังสีจะมีผลต่อจำนวนโฟโตอิเล็กตรอนซึ่งจะมีจำนวนมากขึ้น



ทฤษฎีฟิสิกส์ยุคเก่ากล่าวว่เมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบบโลหะ จะทำให้อะตอมมีการสั่นสะเทือนแบบซิมเปิลฮาร์โมนิก ถ้าความเข้มของคลื่นมีค่ามากขึ้น นั่นคือขนาดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะมากขึ้น ทำให้แรงที่ทำให้เกิดการสั่นมีค่ามาก อิเล็กตรอนจะหลุดจากผิวโลหะด้วยพลังงานที่มีค่ามาก ถ้าเพิ่มความถี่แสงพลังงานของโฟโตอิเล็กตรอนจะมีค่าลดลง เพราะผลของความเฉื่อยของมวลของอิเล็กตรอน จะเห็นว่าคำทำนายที่ทฤษฎีฟิสิกส์ยุคเก่ากล่าวไว้ขัดแย้งกับผลการทดลอง

8.3.1 สมการทั่วไปของปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริก

ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์ได้อธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริกได้เป็นผลสำเร็จ ทำให้เขาได้รับรางวัลโนเบลในเวลาต่อมา ไอน์สไตน์เสนอว่าแสงเป็นกลุ่มพลังงานเล็ก ๆ เปรียบได้ดังอนุภาค มีมวล มีโมเมนตัม และพลังงาน เรียกว่าโฟตอน (photon) เมื่อโฟตอนชนกับอิเล็กตรอนจะเหมือนกับอนุภาค 2 อนุภาคชนกัน จะมีการถ่ายเทพลังงานให้แก่อิเล็กตรอนทั้งหมด ถ้าพลังงานที่ถ่ายเทให้นี้มีค่าเท่ากับพลังงานที่ยึดอิเล็กตรอนไว้ในนิวเคลียส เราเรียกค่าพลังงานนี้ว่า เวิร์กฟังก์ชัน ถ้าพลังงานที่ถ่ายเทให้นี้มีค่ามากกว่าเวิร์กฟังก์ชัน พลังงานที่เหลือจะกลายเป็นพลังงานจลน์ของโฟโตอิเล็กตรอน สามารถเขียนเป็นสมการโฟโตอิเล็กตริกของไอน์สไตน์ ดังนี้

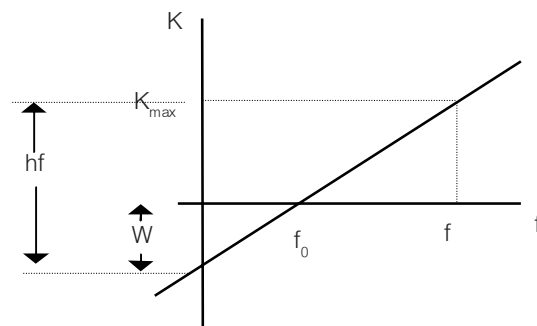
$$hf = W + K \quad \dots\dots\dots (8.37)$$

เมื่อให้ hf เป็นพลังงานของโฟตอนที่ตกกระทบบ

W คือ Work function หน่วยเป็นอิเล็กตรอนโวลต์ (eV)

K คือพลังงานจลน์ค่าสูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน

เมื่อเขียนกราฟระหว่างพลังงานจลน์ของโฟโตอิเล็กตรอนกับความถี่ของแสงที่ตกกระทบบจะมีลักษณะดังนี้



รูป 8.14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์และความถี่



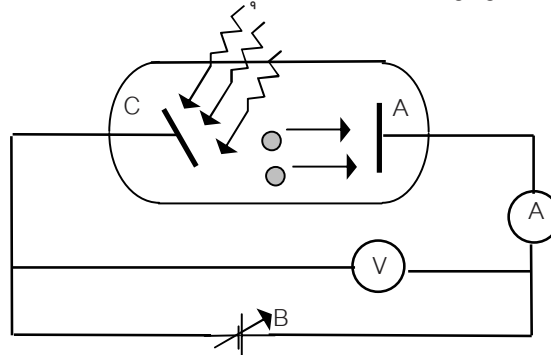
กราฟที่ได้เป็นกราฟเส้นตรง มีความชันเท่ากับค่าคงที่ของพลังค์ จุดที่ตัดกับแกน f ที่ตำแหน่ง f_0 จุดนี้คือความถี่ขีดเริ่ม เวิร์กฟังก์ชัน (W) จึงหาได้จาก $W = hf_0$ ตรงจุด f_0 นี้พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนจะเป็นศูนย์

ตารางต่อไปนี้เป็นเวิร์กฟังก์ชันของโลหะชนิดต่าง ๆ

ตาราง 8.1 แสดงค่าเวิร์กฟังก์ชันของโลหะ

โลหะ	W (eV)
แบเรียม	2.5
ซีเซียม	1.9
ทองแดง	4.5
โปแตสเซียม	2.2
เงิน	4.6
โซเดียม	2.3
ทังสเตน	4.5

การวัดค่าพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนจะต้องรู้ค่าความเร็วของอิเล็กตรอน ซึ่งในทางปฏิบัติวัดได้ลำบาก เราจึงวัดพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในรูปของศักย์หยุดยั้ง (Stopping Potential) มิลลิแกน (Millikan) ได้เสนอวิธีการวัดค่าศักย์หยุดยั้งไว้เมื่อ ค.ศ. 1916



รูป 6.7 การหาค่าศักย์หยุดยั้ง

อุปกรณ์ประกอบด้วยหลอดสุญญากาศ มีขั้วลบเป็นแผ่นโลหะ (C) รับแสงที่ตกกระทบ อีกปลายด้านหนึ่งของหลอดเป็นขั้วบวก (A) ต่อขั้วทั้งสองเข้ากับแหล่งจ่ายไฟตรงที่สามารถปรับ



แรงเคลื่อนไฟฟ้าได้ สามารถวัดกระแสและความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ขั้วทั้งสองของหลอดได้จากแอมมิเตอร์และโวลต์มิเตอร์

จากรูปเมื่อให้แสงตกกระทบบนโลหะจะเกิดโฟโตอิเล็กตรอนเคลื่อนที่จากขั้วลบมายังขั้วบวก ถ้าความต่างศักย์ที่ขั้ว AC มากเท่าใดจะช่วยเสริมร่วมกับพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน ทำให้วิ่งมาถึงแผ่นบวกได้เร็วและมากขึ้น ถ้ากลับขั้วแหล่งจ่ายไฟตรงเสียใหม่ ให้ขั้ว A เป็นลบเมื่อเทียบกับ C เริ่มต้นปรับค่าความต่างศักย์จากศูนย์โวลต์ขึ้นไป จะมีสนามไฟฟ้าซึ่งทำให้เกิดแรงต้านในทิศที่สวนกับการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน ความต่างศักย์ที่ขั้ว A เป็นลบมากขึ้นเท่าใด อิเล็กตรอนจะวิ่งถึงขั้ว A ได้ยากขึ้นเพียงนั้น จนถึงค่าความต่างศักย์ค่าหนึ่งเท่ากับ V_0 จะไม่มีอิเล็กตรอนตัวใดวิ่งถึงขั้ว A เลย ซึ่งสังเกตได้จากกระแสที่ไหลผ่านแอมมิเตอร์เป็นศูนย์ เรียกว่า V_0 ว่าเป็นศักย์หยุดยั้ง ตรงค่า V_0 นี้แสดงว่าพลังงานไฟฟ้าที่ใช้ด้านการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนพอดี นั่นคือ

$$K = qV_0 \quad \dots\dots\dots (8.38)$$

แทนค่า K ลงในสมการ (8.37)

$$hf = W + qV_0 \quad \dots\dots\dots (8.39)$$

สมการ (8.38) ถูกนำไปใช้ในทางปฏิบัติมากกว่าสมการ (8.36) เพราะสามารถวัดพลังงานจลน์ได้จากความต่างศักย์ได้โดยตรง

8.3.2 การคำนวณหาเวิร์กฟังก์ชัน ความถี่ขีดเริ่ม และศักย์หยุดยั้ง

ตัวอย่าง 8.8 โลหะโซเดียมมีค่าเวิร์กฟังก์ชัน = 2.3 eV เมื่อฉายแสงสีเขียวยาวคลื่น 5,000 แองสตรอม จะเกิดปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริกหรือไม่

วิธีทำ จากค่าเวิร์กฟังก์ชัน ทำให้รู้ความถี่ขีดต่ำสุดของโลหะโซเดียมได้

$$W = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

หรือ $\lambda_0 = \frac{hc}{W}$

$h = 6.625 \times 10^{-34}$ จูล·วินาที

$c = 3 \times 10^8$ เมตร/วินาที

$w = 2.3 \times 1.6 \times 10^{-19}$ จูล

จะได้ $\lambda_0 = 5394.9$ แองสตรอม

ความยาวคลื่นของแสงสีเขียวน้อยกว่าความยาวคลื่นขีดต่ำสุด จึงเกิดปรากฏการณ์

โฟโตอิเล็กตริกได้



ตัวอย่าง 8.9 ฉายแสงจากหลอดปรอทซึ่งให้แสงความยาวคลื่น 2537 แองสตรอม บนแผ่นโลหะซีเซียมซึ่งมีค่าเวิร์กฟังก์ชันเท่ากับ 19 eV จงคำนวณหา

ก. ความเร็วสูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน

ข. ศักย์หยุดยั้ง

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ก. จาก } K &= hf - W \\ &= \frac{hc}{\lambda_0} - W \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } c = 3 \times 10^8 \text{ เมตร/วินาที} \quad h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ จูล.วินาที}$$

$$\lambda = 2537 \times 10^{-10} \text{ เมตร} \quad W = 1.9 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ จูล}$$

$$K = 4.67 \times 10^{-19} \text{ จูล}$$

ค่าพลังงานจลน์นี้ถือว่าเป็นค่าสูงสุด เพราะเกิดจากโฟโตอิเล็กตรอนหลุดเป็นอิเล็กตรอนอิสระโดยตรง ไม่เสียพลังงานให้กับการชนกับอิเล็กตรอนตัวอื่นๆ ความเร็วสูงสุดของอิเล็กตรอนคือ

$$v^2 = \frac{2K}{m}$$

$$v = 1.02 \times 10^6 \text{ เมตร/วินาที}$$

ข. คำนวณหาค่าศักย์หยุดยั้ง

$$\begin{aligned} K &= qV_0 \\ &= \frac{4.67 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb}} \\ &= 2.99 \text{ volt} \end{aligned}$$

8.4 ปรากฏการณ์คอมป์ตัน (The Compton effect)

ปรากฏการณ์คอมป์ตัน เป็นปรากฏการณ์ที่แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถประพฤติตัวเป็นอนุภาคไร้มวลที่เรียกว่าโฟตอนได้ คอมป์ตันได้ทำการทดลองไว้เมื่อ ค.ศ. 1923 โดยฉายรังสีเอ็กซ์ไปยังแท่งกราฟไฟต์ รังสีเอ็กซ์ที่ผ่านแท่งกราฟไฟต์จะมีการกระเจิงออกมา ความถี่ของรังสีเอ็กซ์ที่กระเจิงนี้จะมีค่าลดลงกว่าเดิมและขึ้นอยู่กับมุมกระเจิงเท่านั้น

จากทฤษฎีสัมพัทธภาพ สมการพลังงานของอนุภาคที่มีมวลนิ่งเท่ากับ m_0 มีโมเมนตัมเท่ากับ p คือ

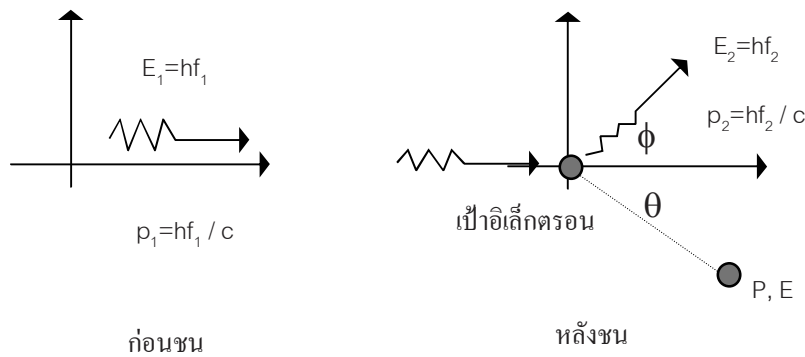
$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2 = (mc^2)^2$$



โฟตอนของรังสีเอกซ์ที่มีความถี่ f เป็นอนุภาคไร้มวล $m_0 = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} E &= pc \\ \text{หรือ} \quad p &= \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8.39)$$

จากรูป 8.16 โฟตอนของรังสีเอกซ์มีพลังงาน $E_1 = hf_1$ มีโมเมนตัม $p_1 = h/\lambda_1$ วิ่งชนอิเล็กตรอนของแท่งกราฟไฟต์ ทำให้อิเล็กตรอนเบี่ยงเบนไปจากแนวเดิมเท่ากับ θ โมเมนตัมของอิเล็กตรอนหลังการชนคือ P พลังงานทั้งหมดของอิเล็กตรอนหลังชนคือ E โดยที่ $E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + P^2c^2}$ โฟตอนกระเจิงไปจากแนวเดิมเป็นมุม ϕ ความถี่ของโฟตอนหลังชนเท่ากับ f_2



รูป 8.16 แสดงการชนของโฟตอนกับอิเล็กตรอนในแท่งกราฟไฟต์

จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

ผลบวกของโมเมนตัมก่อนชน = ผลบวกของโมเมนตัมหลังชนในแนวแกน x

$$\frac{hf_1}{c} + 0 = \frac{hf_2}{c} \cos\phi + P \cos\theta \quad \dots\dots\dots (8.40)$$

ในแนวแกน y

$$0 + 0 = \frac{hf_2}{c} \sin\phi + P \sin\theta \quad \dots\dots\dots (8.41)$$

จากสมการ (8.40)

$$hf_1 - hf_2 \cos\phi = Pc \cos\theta \quad \dots\dots\dots (8.42)$$



จากสมการ (8.41)

$$hf_2 \sin \phi = Pc \sin \theta \quad \dots\dots\dots (8.43)$$

นำสมการ (8.42) และสมการ 8.43) ยกกำลังสองแล้วบวกกัน

$$(hf_1)^2 - 2(hf_1)(hf_2) \cos \phi + (hf_2)^2 = P^2 c^2 \quad \dots\dots\dots (8.44)$$

จากสมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\begin{aligned} \text{ผลบวกของพลังงานก่อนชน} &= \text{ผลบวกของพลังงานหลังชน} \\ hf_1 + m_0 c^2 &= hf_2 + mc^2 \quad \dots\dots\dots (8.45) \end{aligned}$$

เมื่อ m_0 และ m คือมวลนิ่งและมวลขณะเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนตามลำดับ

จากสมการ (6.20) ย้ายข้างจะได้

$$hf_1 - hf_2 = (m - m_0)c^2 \quad \dots\dots\dots (8.46)$$

จากสมการ (8.46) จะเห็นว่าพลังงานของโฟตอนที่ลดลงจะกลายเป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่เพิ่มขึ้น (K)

นั่นคือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

$$\begin{aligned} K &= hf_1 - hf_2 \\ &= mc^2 - m_0 c^2 \end{aligned}$$

$$\text{แต่ } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \dots\dots\dots (8.47)$$

$$\text{หรือ } m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2$$

จัดรูปสมการ(8.44)ใหม่ แล้วยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(hf_1 - hf_2 + m_0 c^2)^2 = (mc^2)^2$$

แทนค่า $m^2 c^2$ จากสมการ (8.47) จะกลายเป็น

$$(hf_1 - hf_2 + m_0 c^2) = c^2 (m_0^2 c^2 + m^2 v^2)$$

แต่ $mv = P$ ซึ่งเป็นโมเมนตัมของอิเล็กตรอน

$$(hf_1 - hf_2 + m_0 c^2) = (m_0 c^2)^2 + P^2 c^2 \quad \dots\dots\dots (8.48)$$



แทนค่า P^2c^2 จากสมการ (8.44) จัดรูปสมการเสียใหม่จะได้

$$2m_0c^2(hf_1-hf_2) - 2h^2f_1f_2(1 - \cos\phi) = 0$$

เปลี่ยนค่าความถี่ให้อยู่ในรูปความยาวคลื่นจะได้

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\phi) \dots\dots\dots (8.49)$$

กำหนดให้ $\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$ เรียกว่าความยาวคลื่นของคอมป์ตัน

สำหรับอิเล็กตรอน λ_c จะมีค่าเท่ากับ 0.02426 แองสตรอม

จากสมการ (8.49) จะเห็นว่าความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่เปลี่ยนไปไม่ได้ขึ้นอยู่กับความยาวคลื่นเดิมหรือพลังงานก่อนชน แต่ขึ้นอยู่กับมุมที่กระเจิงไปเท่านั้น สอดคล้องกับผลการทดลองที่ได้สมการ (68.49) นี้ได้มาจากสมมติฐานที่ว่ารังสีเอกซ์เป็นโฟตอนที่ปราศจากมวล

ตัวอย่าง 8.10 ฉายรังสีเอกซ์ความยาวคลื่น 1 แองสตรอมผ่านแท่งคาร์บอน รังสีเอกซ์กระเจิงทำมุม 180° กับแนวเดิม จงคำนวณ

- ก. ความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่กระจายออกมา
- ข. พลังงานจลน์สูงสุดของอิเล็กตรอนซึ่งถูกชน

วิธีทำ ก. จากสมการ (8.49)

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c (1 - \cos\phi)$$

ในที่นี้ $\lambda_1 = 1$ แองสตรอม

$$\lambda_c = 0.02426 \text{ แองสตรอม}$$

$$\phi = 180^\circ$$

จะได้ $\lambda_2 - 1 = 0.02426 (1 - \cos 180)$

$$\lambda_2 = 1.0485 \text{ แองสตรอม}$$

ข. พลังงานจลน์สูงสุดของอิเล็กตรอน

$$\begin{aligned} K &= hf_1 - hf_2 \\ &= hc \left[\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right] \\ &= 574.38 \text{ อิเล็กตรอนโวลต์} \end{aligned}$$



8.5 สมบัติคลื่นของอนุภาค

ค.ศ.1924 หลุยส์ วิกเตอร์ เดอบรอยล์ ได้เสนอว่าเมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถมีสมบัติของอนุภาคได้ อนุภาคก็มีสมบัติความเป็นคลื่นได้เช่นกัน เรียกคลื่นของอนุภาคนี้ว่า คลื่นเดอบรอยล์ ความยาวคลื่นและโมเมนตัมของอนุภาคมีความสัมพันธ์กันดังนี้

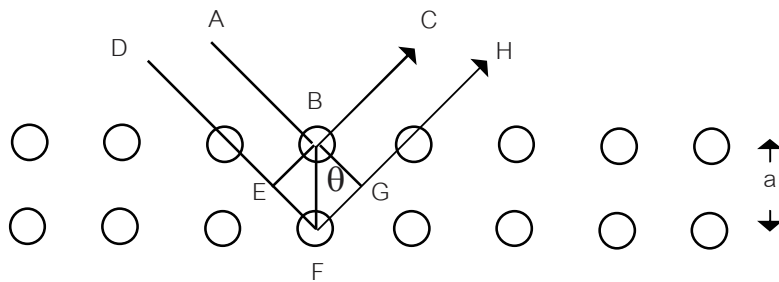
$$P = \frac{h}{\lambda} = mv$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \dots\dots\dots (8.50)$$

ถ้าความเร็วของอนุภาคมีค่าน้อยกว่าความเร็วแสงมาก ๆ ถือได้ว่า $m = m_0$ เมื่อ m_0 คือมวลของอนุภาคขณะหยุดนิ่ง แต่ถ้าความเร็วของอนุภาคเข้าใกล้ความเร็วแสงต้องใช้ความสัมพันธ์ของ m และ m_0 ในสมการ(8.47) มาคำนวณด้วย

ในชีวิตประจำวันคลื่นของอนุภาคมีอิทธิพลต่อปรากฏการณ์ที่สังเกตเห็นน้อยมาก ตัวอย่างเช่น ลูกบอลมวล 1 กิโลกรัม เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที คลื่นเดอบรอยล์ของลูกบอลมีค่าเท่ากับ 6.625×10^{-34} เมตร ความยาวคลื่นนี้มีค่าน้อยมากยากที่จะตรวจวัดได้

ผลการทดลองที่แสดงให้เห็นว่าอิเล็กตรอนแสดงสมบัติความเป็นคลื่นได้คือการทดลองของเดวิดสันและเจอร์เมอร์ (Davidson and Germer) ในปี ค.ศ. 1927 โดยปล่อยลำอิเล็กตรอนผ่านเข้าไปในผลึกของนิเกิล อิเล็กตรอนจะเกิดการเลี้ยวเบนในผลึกทำให้ทางเดินของลำอิเล็กตรอนที่ผ่านระนาบของผลึกที่อยู่ติดกันมีค่าต่างกันทำให้เกิดการแทรกสอดของคลื่นอนุภาค



รูป 8.17 คลื่นอิเล็กตรอนผ่านระนาบที่ต่างกันของผลึกนิเกิล

จากรูปคลื่นอิเล็กตรอนผ่านระนาบที่ต่างกันของผลึกซึ่งมีความกว้าง $= a$ เส้นทางของคลื่น ABC และ DEFG จะมีความยาวไม่เท่ากันโดยมีผลต่างของทางเดิน (path difference) เท่ากับ EFG



$$EFG = 2a \sin\theta$$

การแทรกสอดของคลื่นอนุภาคจะเสริมกันก็ต่อเมื่อผลต่างของทางเดินของคลื่นเป็นจำนวนเท่าของความยาวคลื่น

$$2a \sin \theta = n \lambda \quad \dots\dots\dots (8.51)$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3 \dots$

ตัวอย่าง 8.11 นิวตรอนมีพลังงานจลน์ 0.0082 eV จงหาความยาวคลื่นเดอบรอยล์ของนิวตรอนนี้

วิธีทำ จาก $\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}$

เมื่อ K คือพลังงานจลน์ของนิวตรอน $= 0.082 \times 1.602 \times 10^{-19}$ จูล

m_0 คือมวลนิ่งของนิวตรอน $= 1.675 \times 10^{-27}$ กิโลกรัม

h ค่าคงที่ของพลังค์ $= 6.625 \times 10^{-34}$ จูล·วินาที

แทนค่าจะได้ $\lambda = 1.412 \times 10^{-10}$ เมตร

ตัวอย่าง 8.12 โลกมีมวล 6×10^{24} กิโลกรัม รัศมีวงโคจร 1.5×10^{11} เมตร ความเร็วในแนวเส้นสัมผัสเส้นรอบวงคือ 3×10^4 เมตร/วินาที จงคำนวณหาความยาวคลื่นเดอบรอยล์ของโลก

วิธีทำ $\lambda = \frac{h}{mv}$

เมื่อ m คือมวลของโลก และ v คือความเร็วของโลก

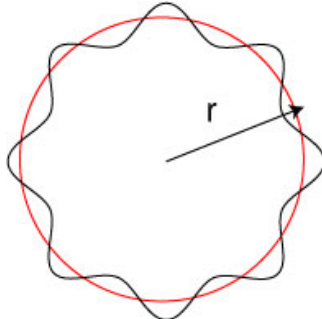
$$= \frac{6.625 \times 10^{-34}}{6 \times 10^{24} \times 3 \times 10^4}$$

$$= 0.368 \times 10^{-62} \text{ เมตร}$$

อนุภาคที่มีมวลมากคลื่นเดอบรอยล์จะมีค่าน้อยมากจนไม่สามารถวัดได้ คลื่นเดอบรอยล์ของอนุภาคที่มีมวลน้อย ๆ เช่น อิเล็กตรอนจะสังเกตเห็นได้ง่ายกว่า



8.3 หลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก-ฟังก์ชันคลื่น

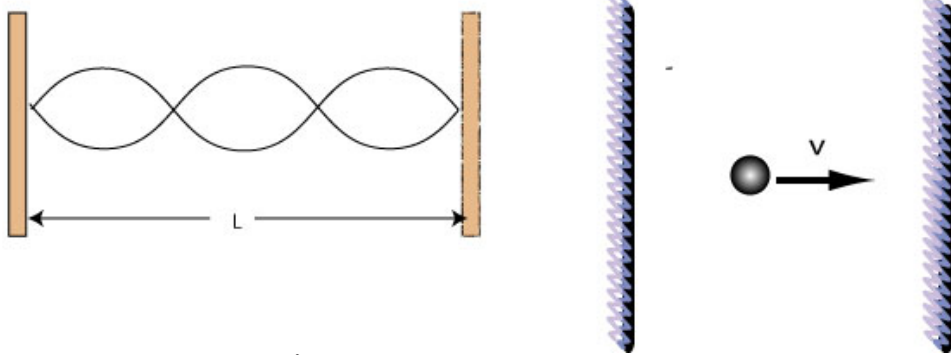


รูป 8.18 แสดงให้เห็นการจัดตัวของความยาวคลื่นอิเล็กตรอนเป็นจำนวนเต็มหน่วยรอบเส้นรอบวงโคจรของบอร์ (Bohr orbit) รัศมี r

พิจารณาดูอิเล็กตรอนที่โคจรรอบนิวเคลียส มันสามารถวิ่งโคจรรอบนิวเคลียสได้ โดยไม่ถูกดูดลงไปเข้าหานิวเคลียส นั่นแสดงว่า ขณะที่มันโคจรอยู่มันไม่ได้สูญเสียพลังงานเลย ตามสมมุติฐานของเดอบรอยล์ การเคลื่อนที่ของมันรอบนิวเคลียสน่าจะเป็นลักษณะคลื่นนิ่ง โดย ความยาวของวงโคจร เท่ากับผลคูณเลขจำนวนเต็มกับความยาวคลื่น

พิจารณา	$2\pi r = n\lambda$
แต่	$\lambda = h/P$
ฉะนั้น	$2\pi r = nh/P$
จะได้	$2\pi r(mv) = nh$
	$mvr = \frac{nh}{2\pi}$

ซึ่งสอดคล้องกับสมมุติฐานข้อที่หนึ่งของนิลส์ บอห์ร์



รูป 8.19 (ก.) เชือกยาว L ถูกตรึงปลายทั้งสอง (ข) อนุภาคมวล m ความเร็ว v เคลื่อนที่ระหว่างผนังแข็งระยะ L



wave disturbance เป็นการมองตัวกลางซึ่งถูกรบกวนโดยคลื่น การรบกวนที่เกิดขึ้นก็คือคลื่นนั่นเอง สำหรับ คลื่นวัตถุ ψ เป็นตัวบอก wave disturbance ในเรื่องคลื่นเสียง wave disturbance คือ การแปรของความกดอากาศ P ในเรื่องคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า wave disturbance ก็คือ ความเข้มสนามไฟฟ้า นั่นเอง

พิจารณาฟังก์ชันคลื่น $\psi(x,r)$ ของเชือกยาว L ที่ถูกตรึงปลายทั้งสองในรูปถ้าเชือกเส้นนี้เกิดคลื่นนิ่งและมีบัพ (node) ที่ปลายทั้งสอง ความยาวคลื่นหาได้จาก

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม } = 1, 2, 3, \dots$$

และเขียน wave disturbance ได้ดังนี้

$$y = y_m \sin kx \cos \omega t$$

ซึ่ง $\omega = 2\pi f$ เป็นความถี่เชิงมุมของคลื่นและ $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$ เป็นเลขคลื่น

ดังนั้นสมการคลื่นนิ่งจะเป็น

$$Y = y_m \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \omega t$$

ถ้าเรานำสมการ 1 มา plot โดยให้ $n = 1, 2$ และ 3 จะได้รูป 8.20 ซึ่งที่ $x = 0$ และ $x = L$ จะได้ $y = 0$ เป็นบัพที่ปลายทั้งสอง พิจารณาอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่ที่อยู่ระหว่างกำแพงแข็งสองข้างห่างกัน L ดังรูป ความยาวคลื่นของอนุภาคคือ

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม } = 1, 2, 3,$$

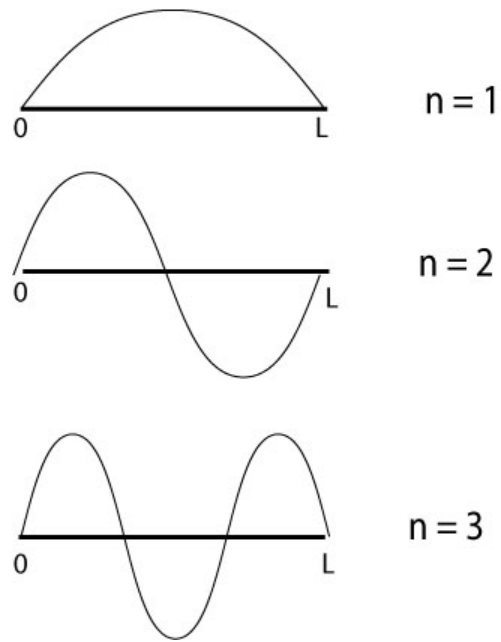
แทนค่า $\lambda = h / P$ จะได้ $P = nh / 2L$

จากสมการ $P = \sqrt{2mE}$

จาก 2 สมการข้างต้น แทนค่า P เราจะได้

$$\frac{nh}{2L} = \sqrt{2mE}$$

$$E = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$



รูป 8.20

พลังงานของอนุภาค มิใช่มีค่าเท่าไรก็ได้ แต่จะมีค่าตามสมการข้างต้น สมการคลื่นของอนุภาคนี้ เมื่อเปรียบเทียบกับสมการคลื่นนิ่งในเส้นเชือก จึงเขียนได้ดังนี้

$$\psi = \psi_m \sin \frac{n\pi}{L}x \cos \omega t$$

ตัวอย่าง 8.12 อิเล็กตรอนมวล 9×10^{-31} kg เคลื่อนที่อยู่ระหว่างผนังแข็งห่างกัน 1.0×10^{-9} m (ประมาณ 5 เท่า ของเส้นผ่าศูนย์กลางของอะตอม) จงหาพลังงานควัน-ไตซ์ของอิเล็กตรอนเมื่อ $n = 1, 2$ และ 3

วิธีทำ จากสมการ เมื่อ $n = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} E &= \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \\ &= 1^2 \frac{(6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1 \times 10^{-9} \text{ m})} \\ &= 6.0 \times 10^{-20} \text{ J} = 0.38 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } n = 2 \quad E = 2^2 (0.38) = 1.5 \text{ eV}$$

$$\text{เมื่อ } n = 3 \quad E = 3^2 (0.38) = 3.4 \text{ eV}$$



ตัวอย่าง 8.13 ผงฝุ่นมวล 1 ไมโครกรัม หรือ 10^{-9} kg เคลื่อนที่อยู่ระหว่างผนังแข็งห่างกัน 0.1 mm หรือ 10^{-4} m ด้วยความเร็ว 10^{-6} m/s ถ้ามันใช้เวลา 100 s ในการเคลื่อนที่จากผนังด้านหนึ่งไปอีกด้านหนึ่ง จงหาเลขควันตัมของการเคลื่อนที่นี้

วิธีทำ

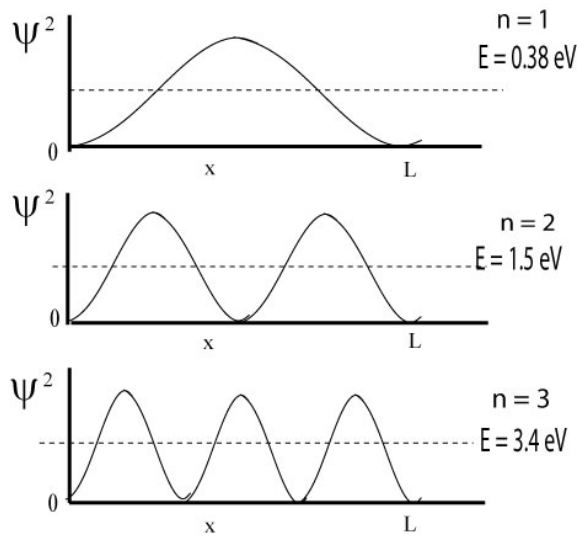
$$\begin{aligned} \text{หาพลังงานของผงฝุ่น} \quad \sqrt{2mE} &= \frac{nh}{2L} \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= 0.5 \times 10^{-9} \text{ kg} \times (10^{-6} \text{ m/s})^2 \\ &= 5 \times 10^{-22} \text{ J} \\ \text{จากสมการ} \quad n &= \frac{\sqrt{8mE} L}{h} \\ &= 3 \times 10^{14} \end{aligned}$$

ผลการคำนวณชี้ให้เห็นว่า ในการพิจารณาวัตถุมีขนาดที่เราสามารถมองเห็นนั้น (เช่นผงฝุ่น) จะสังเกตเห็นธรรมชาติของควันตัมได้ยาก เพราะเราไม่สามารถจะแยกความแตกต่างระหว่าง $n = 3 \times 10^{14}$ และ $3 \times 10^{14} + 1$ ได้ ฉะนั้นฟิสิกส์แบบเก่าไม่สามารถอธิบายตัวอย่าง (8.13) ได้ แต่จะสามารถอธิบายตัวอย่าง(8.12) ได้ อย่างดี

ความหมายของ ψ

แมกซ์บอร์น (Max Born) ได้แนะนำ ปริมาณ ψ^2 ที่จุดใดจุดหนึ่ง คือ ความเป็นไปได้ (Probability) ที่จะพบอนุภาคใกล้จุดนั้น ถ้าเราสร้างปริมาตรเล็กๆ dV ล้อมรอบจุดนั้น ความเป็นไปได้ที่เราจะพบอนุภาค ขณะใดขณะหนึ่งจะเท่ากับ $\psi^2 dV$ สำหรับอนุภาคที่วิ่งอยู่ระหว่างผนังหรือกำแพงที่กล่าวมาแล้ว ความเป็นไปได้ที่จะพบอนุภาคระหว่างระยะ x และ $x + dx$ จากปลายข้างหนึ่งของผนังคือ

$$\begin{aligned} \psi^2 dx &= \psi_m^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x \cos^2 \omega t dx \\ \text{ถ้าแทนค่า } \cos^2 \omega t \text{ ด้วย } \frac{1}{2} \text{ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของ } \cos \text{ เราจะได้ } \psi^2 \text{ เฉลี่ยดังนี้} \\ \psi^2 &= \frac{1}{2} \psi_m^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x \quad (8.52) \end{aligned}$$



รูป 8.21 แสดงความเป็นไปได้ที่จะพบอนุภาคเมื่อ $n=1, 2$ และ 3

เช่นเมื่อ $n=1$ ความเป็นไปได้ที่เราจะพบอนุภาคที่กึ่งกลางจะมากกว่าที่ผนังทั้งสองข้าง ผลลัพธ์ดังกล่าวนี้ขัดกับความคิดแบบเก่ามาก ซึ่งกล่าวว่า ความเป็นไปได้ในการพบอนุภาคตามที่แตกต่างกัน ๗ ระหว่างผนังทั้งสองมีค่าเท่าๆ กัน

ถ้าลองเอาวิชากลศาสตร์แห่งคลื่นของชโรดิงเงอร์ มาใช้กับอะตอมของไฮโดรเจน และอาศัยคณิตศาสตร์ ขั้นสูง เราจะได้ฟังก์ชันคลื่นของอะตอมไฮโดรเจนที่ ground state ดังนี้

$$\Psi = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha^3}} e^{-\frac{r}{\alpha}} \cos \omega t$$

$$\text{ซึ่ง } \alpha = \frac{h^2}{\pi m e^2}$$

ถ้ามีที่ว่างระหว่างทรงกลมสองลูกศูนย์กลางอยู่ที่นิวเคลียสของอะตอมของไฮโดรเจน รัศมีของทรงกลม r และ dr จงหาความเป็นไปได้ $P(r)$ ที่อิเล็กตรอนจะอยู่ในที่ว่างนี้ในเทอมของ r

ความเป็นไปได้ $\Psi^2 dV$ ซึ่ง dV เป็นปริมาตรของที่ว่างอยู่ระหว่างทรงกลมทั้งสองคือ $4\pi r^2 dr$ ดังนั้น

$$\Psi^2 dV = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha^3}} e^{-\frac{r}{\alpha}} \cos \omega t \right)^2 4\pi r^2 dr = P(r) dr \quad (8.53)$$

แทนค่า $\cos^2 \omega t$ ด้วย $1/2$ จะได้ความเป็นไปได้เฉลี่ยคือ



$$\bar{P}(r) = \frac{2r^2}{\alpha^3} e^{-\frac{2r}{\alpha}}$$

ถ้าเราพล็อต $\bar{P}(r)$ กับ r/a จะเห็นว่าตำแหน่งที่อิเล็กตรอนน่าจะอยู่มากที่สุดคือที่รัศมีวงที่หนึ่งของบอร์ (First Bohr radius) ฉะนั้นในวิชาฟิสิกส์แห่งคลื่น เราไม่พูดว่าอิเล็กตรอนในวงที่ $n = 1$ ของไฮโดรเจนวิ่งรอบนิวเคลียสเป็นวงกลมด้วยรัศมี 0.529 \AA แต่จะพูดว่า ตำแหน่งที่น่าจะพบอิเล็กตรอนตัวนี้มากที่สุดคือ ระยะห่างจากนิวเคลียส 0.529 \AA

ปริมาณต่างๆ ที่เราวัดได้เท่านั้นที่จะมีความหมายในทางฟิสิกส์สมมติว่าเราสามารถจ้องมองดูอิเล็กตรอนตัวหนึ่ง และเห็นมันโคจรรอบนิวเคลียสเป็นวงโคจร วงโคจรนั้นก็มีความหมายในทางฟิสิกส์ แต่อย่างไรก็ตาม เราจะไม่มีทางสังเกตเห็นวงโคจรอันนี้ได้เลย ถึงแม้จะมีเครื่องมือที่สร้างขึ้นอย่างต้องตามอุดมคติ ฉะนั้นเราจึงบอกได้ว่าวงโคจรดังกล่าวไม่มีความหมายทางฟิสิกส์เลย

เรามองเห็นจากดวงจันทร์เพราะแสงจากดวงอาทิตย์กระทบดวงจันทร์แล้วสะท้อนเข้าตาเรา กรณีนี้แสงแดดจะถ่ายโมเมนตัมเชิงเส้นให้กับดวงจันทร์ ซึ่งตามทฤษฎีแล้วจะไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของมันอย่างชนิดที่เราจะมองข้ามไปไม่ได้ ดังนั้น ในขณะใดขณะหนึ่งที่เราสังเกตดูอิเล็กตรอน เราไม่สามารถจะบอกทั้งตำแหน่งและโมเมนตัมที่ถูกต้องแน่นอนของมันได้ จึงไม่เป็นการประหลาดเลยที่เราจะได้การกระจายกระจายของประจวบนิวเคลียสของไฮโดรเจนอะตอมเป็นรูปโค้งของความเป็นไปได้ (probability curve)

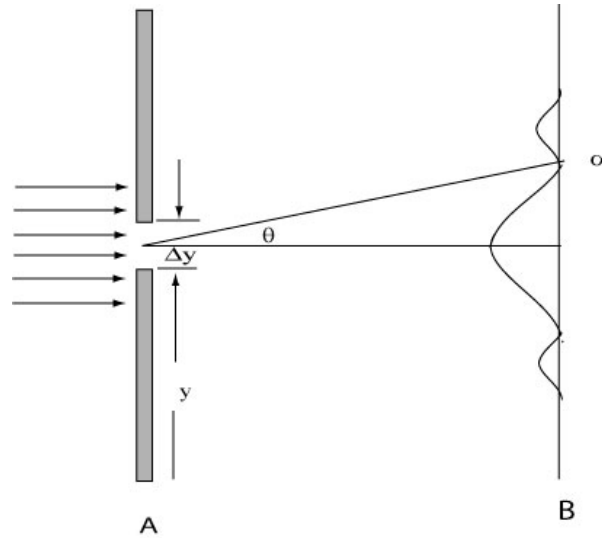
จากความล้มเหลวในการอธิบายการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน จึงทำให้เกิดทฤษฎีใหม่เรียกว่าหลักของความไม่แน่นอน (Uncertainty Principle) ซึ่งคิดค้นโดยเวอร์เนอร์ ไฮเซนเบิร์ก (Werner Heisenberg) ในปี 1927 พิจารณาจากรูป ซึ่งเป็นลำของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานเท่ากัน มีความเร็ว v วิ่งจากซ้ายไปขวา สมมติว่าเราต้องการหาตำแหน่งตามแนวตั้ง y และความเร็วตามแนวนั้น v_y ของอิเล็กตรอนตัวหนึ่ง เราจะพบในที่สุดว่า ไม่มีทางเป็นไปได้เลยที่ในขณะใดขณะหนึ่งที่เราจะวัดทั้งตำแหน่งและความเร็วของอิเล็กตรอนให้ถูกต้องได้

เพื่อจะวัด y เราใช้ลำอิเล็กตรอนด้วยฉาก A ที่มีช่อง (slit) กว้าง Δy ถ้าอิเล็กตรอนวิ่งผ่านเข้าช่องนี้ ระยะตามแนวตั้ง y ของมันจะถูกวัดได้ถูกต้องมากขึ้นขึ้นอยู่กับความกว้างของช่อง ถ้ายิ่งทำให้ช่องแคบลงก็จะได้ตำแหน่งที่ถูกร่องมากขึ้น

เนื่องจากอิเล็กตรอนเป็นคลื่น มันจะเกิดการเลี้ยวเบนขึ้นและให้รู้กระสวนของการเลี้ยวเบน (diffraction pattern) บนฉาก B การเกิดกระสวนของการเลี้ยวเบน แสดงว่าเกิดความไม่แน่นอน (Uncertainty) ของค่า v_y ของอิเล็กตรอน ให้ v_{ya} เป็นความเร็วของอิเล็กตรอนที่ตกลงบนค่าต่ำสุดอันฟิสิกส์รำฆมงคล <http://www.rit.ac.th/homepage-sc/physics/>



แรก (first minimum) บนฉาก B ที่ตำแหน่ง และรองรับมุม θ_α ดังรูป เราอาจจะถือได้ว่า v_{ya} เป็นค่าหยาบๆ ของความไม่แน่นอน Δv_y ของ v_y



รูป 8.22 อิเล็กตรอนผ่านช่องแคบเล็ก ๆ ขนาด Δy

ค่าต่ำสุดของแรกของกระสวนของการเลี้ยวเบนจากสมการ

$$\sin \theta_\alpha = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

ถ้า θ_α เป็นมุมที่เล็กมาก

$$\theta_\alpha \approx \frac{\lambda}{\Delta y} \quad (8.54)$$

ณ จุด α ค่า v_{ya} (Δv_y) จะต้องสอดคล้องกับ

$$\theta_\alpha \approx \frac{\Delta v_y}{v} \quad (8.55)$$

จากสมการ (8.54) และ (8.55) จะได้

$$\frac{\Delta v_y}{v} = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

ฉะนั้น

$$\Delta v_y \Delta y = \lambda v \quad (8.56)$$

แต่ $\lambda = h/p$ ฉะนั้น สมการ (8.56) จะเป็น

$$\Delta v_y \Delta y = \frac{h v}{m v}$$

จะได้

$$\Delta p \Delta y = h \quad (8.57)$$



หลักของความไม่แน่นอน

เมื่อ ΔP เป็นความไม่แน่นอนในการวัดโมเมนตัมแนวตั้งของอิเล็กตรอน Δy เป็นความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่งแนวตั้ง เนื่องจากผลคูณของความไม่แน่นอนทั้งสองตัวเท่ากับตัวคงที่สมการ (8.57) จึงบอกให้เรารู้ว่าเราไม่สามารถวัด P และ y ที่ถูกต้องที่สุดในเวลาเดียวกันได้ เพราะเมื่อความไม่แน่นอนของตัวหนึ่งเพิ่มขึ้น อีกตัวหนึ่งต้องลดลง เช่น ถ้าเราจะวัด y ให้ถูกต้องมากขึ้น โดยการทำร่องให้แคบลง (Δy ลดลง) จะเกิดกระสวนของการเลี้ยวเบนที่กว้างขึ้นซึ่งหมายถึง ΔP จะต้องเพิ่มขึ้นดังที่ทำนายไว้ด้วยสมการ

ขีดจำกัดของการวัดซึ่งแสดงโดยสมการ ไม่ได้เกี่ยวข้องกับความหยวนหรือละเอียดของเครื่องมือ (หมายความว่า เราอาจจะทึกทักเอาว่ามีเครื่องมือชนิดละเอียดเท่าใดก็ได้) แต่เกี่ยวข้องกับโดยตรงกับ “ขีด จำกัดพื้นฐาน” (Fundamental Limitation) ของธรรมชาติ

สมการ (8.57) เป็นเพียงกรณีหนึ่งของหลักทั่วไปที่เรียกว่า “หลักของความไม่แน่นอน” (Uncertainty Principle) ถ้าเราใช้หลักการอันนี้มาพิจารณาถึงการวัดตำแหน่ง (Position) และโมเมนตัม (Momentum) จะได้ผลดังสมการนี้

ดังนั้นเราจึงไม่สามารถบรรยายการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน ไม่ว่าจะเป็อิเล็กตรอนอิสระหรือไม่ก็ตาม (free or bound) ในแนวใดก็ได้ตามที่ต้องการโดยไม่มีขีดจำกัด (Unlimited Precision) ความสำคัญของ “ค่าคงที่ของพลังค์” (h) ปรากฏชัดเจนมากในสมการ (8.57) ยิ่งกว่าที่ปรากฏในสมการอื่นใด ถ้าผลคูณในสมการ (8.57) มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ แทนที่จะเป็น h แล้ว การจัดทั้งตำแหน่งและโมเมนตัมในขณะเดียวกันให้ถูกต้อง โดยไม่มีขีดจำกัดก็เป็นไปได้ ความจริงที่ว่ามันเป็น h นั้นแสดงว่า ความคิดเก่าๆ (classical ideas) จอร์จ แกมอว์ (George Gamow) ได้เขียนเรื่องที่น่าสนใจเกี่ยวกับกรณีที่มีค่า h มีค่ามากกว่าที่เป็นจริงมากๆ (ซึ่งจะมีผลทำให้ความคิดเกี่ยวกับควันตัมเป็นเรื่องสามัญสำนึก) ไว้ในหนังสือที่เขียนไว้อย่างน่าอ่านเรื่อง “Mr. Tompkins in wonderland”

ตัวอย่าง 8.16 อิเล็กตรอนตัวหนึ่งวิ่งด้วยความเร็ว 300 meters/sec วัดด้วยความแม่นยำ 0.01% จงหาความไม่แน่นอนในการบอกตำแหน่งของอิเล็กตรอนตัวนี้

วิธีทำ โมเมนตัมของอิเล็กตรอน

$$\begin{aligned} P &= mv \\ &= 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (300 \text{ m/s}) \\ &= 2.7 \times 10^{-32} \text{ kg.m/s} \end{aligned}$$



ความไม่แน่นอนในการวัดโมเมนตัม

$$\begin{aligned}\Delta P &= (0.0001)(2.7 \times 10^{-32}) \text{ kg.m/s} \\ &= 2.7 \times 10^{-28} \text{ kg.m/s}\end{aligned}$$

ความไม่แน่นอนในการบอกตำแหน่ง

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{h}{\Delta P} \\ &= \frac{(6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})}{(2.7 \times 10^{-28} \text{ kg.m/s})} \\ &= 2.4 \text{ cm}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8.17 กระสุนปืนมวล 0.05 kg วิ่งด้วยความเร็ว 300 meters/sec วัดด้วยความแม่นยำ 0.01% จงหาความไม่แน่นอนในการบอกตำแหน่งของลูกปืน

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{หาโมเมนตัม} \quad P &= mv \\ &= 0.05 \text{ kg} \times (300 \text{ m/s}) \\ &= 15 \text{ kg.m/s}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\Delta P &= (0.0001)(15) \text{ kg.m/s} \\ &= 1.5 \times 10^{-3} \text{ kg.m/s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad \Delta x &= \frac{h}{\Delta P} \\ &= \frac{(6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})}{(1.5 \times 10^{-3} \text{ kg.m/s})} \\ &= 4.4 \times 10^{-31} \text{ m}\end{aligned}$$

ค่าที่ได้้น้อยมากจนวัดไม่ได้ แต่อย่างไรก็ตาม จากตัวอย่างทั้งสองก็แสดงให้เห็นว่า เราสามารถใช้ความรู้ทางวิชาคว้นตัมฟิสิกส์ เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ที่คิดตามฟิสิกส์แบบเก่าได้ หลักของความไม่แน่นอน ทำให้เราทราบว่าทำไมการที่ทั้งแสดงและสสาร (Matter) จึงมีคุณสมบัติคู่



(dual property) คือเป็นทั้งคลื่นและอนุภาคจึงเป็นไปได้ทั้งที่คลื่นและอนุภาคมีลักษณะตรงข้ามกัน และก็เนื่องมาจากลักษณะที่ตรงข้ามกันของคลื่นและอนุภาคนี้เองที่ทำให้มันแสดงออกมาพร้อมกันไม่ได้ เช่น ถ้าเราทำการทดลองวันหนึ่งซึ่งมีผลให้อิเล็กตรอนแสดงตัวออกมาในรูปของคลื่นมาก ลักษณะทางอนุภาคของมันจะแสดงออกได้น้อย ดังนั้นทั้งสสารและคลื่นก็คล้ายๆ กับเหรียญในแง่ที่ว่าเราสามารถทำให้เหรียญแสดงหน้าใดหน้าหนึ่งให้เห็นในขณะใดขณะหนึ่ง แต่เราไม่สามารถทำให้เหรียญนั้นแสดงทั้ง 2 หน้า ให้เห็นในขณะเดียวกันได้ นีลส์ บอห์ร (Neils Bohr) ได้ชี้ให้เห็นโดย “หลักการเสริมสร้าง” (The Principle of complementarities) ของเขาว่า ความคิดเกี่ยวกับคลื่นและอนุภาคนั้น น่าจะเสริมกันมากกว่าขัดแย้งหรือตรงข้ามกัน

แบบฝึกหัด หน่วยที่ 8 ฟิสิกส์ยุคใหม่และทฤษฎีควอนตัม

8.1 ในกรอบ s' ซึ่งมีอัตราเร็ว $0.6c$ สัมพัทธ์กับกรอบ s เทียบนาฬิกาไว้ชนิดที่ว่า $t = t' = 0$ ที่ $x = x' = 0$ สิ่งปรากฏใน s ที่เวลา 2×10^{-7} วินาที ที่ $x = 50$ เมตร ใน s' จะเห็นว่าสิ่งนั้นเกิดขึ้นเวลาใด

8.2 ยานอวกาศต่างก็ยาว 100 เมตร เมื่อวัดในกรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่ง เมื่อเคลื่อนที่สวนกันด้วยความเร็วสัมพัทธ์ $0.5c$ ผู้สังเกตบนยานลำหนึ่งจะเห็นยานอีกลำหนึ่งยาวเท่าใด และจะเห็นความยาวเป็นเท่าใด กรณีที่ลำที่เห็นจอด นิ่ง ลำที่สังเกตกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $0.5c$

8.3 ดาวที่ไกลที่สุดในดาราจักร (กาแลกซี) ของเราอยู่ไกลประมาณ 10^5 ปีแสง อนุภาคที่วิ่งด้วยความเร็ว $0.999c$ จะใช้เวลาเดินทางเท่าใด

ก) ตามเวลาของโลก

ข) ตามเวลาของอนุภาค

8.4 π^0 เมซอน มีพลังงานของมวลที่อยู่นิ่ง 135 MeV ในรังสีคอสมิก π^0 บางตัวมีพลังงาน 13.5 GeV หรือ 100 เท่าของ m_0c^2 จงหาอัตราเร็วของ π^0 เมซอนตัวนั้น เทียบกับความเร็วแสง



- 8.5 โดยปกติอายุของ π^0 เมซอน คือ 2 ไมโครวินาที เมื่อวิ่งด้วยพลังงาน 13.5 GeV จะมีอายุเท่าใด ต่อผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง
- 8.6 จงคำนวณหา v/c ของอนุภาคที่ทำให้พลังงานจลน์มีค่าเท่ากับพลังงานมวลนิ่ง
- 8.7 A และ B เป็นฝาแฝด B เดินทางจากโลกไปดาวAlpha-centauri ซึ่งอยู่ไกล 4 ปีแสงด้วยความเร็ว $0.8c$ ช่วงเวลาที่มีความเร่งถือว่าสั้นมาก เมื่อถึงดาว B แล้วก็กลับทันที เมื่อกลับถึงโลก A และ B มีอายุคนละเท่าใด
- 8.8 เครื่องส่งวิทยุมีกำลัง 10 กิโลวัตต์ส่งคลื่นออกไปด้วยความถี่ 880 กิโลเฮิรท์ จงคำนวณหาค่าไฟตอนที่ถูกลบปล่อยออกมาจากเครื่องส่งทุก ๆ วินาที
- 8.9 หลอดไฟ 10 วัตต์ส่งแสงสีเหลืองความยาวคลื่น 6×10^{-7} เมตรออกมาโดยรอบ จงคำนวณหาค่าไฟตอนที่ถูกลบปล่อยออกมาจากหลอดไฟนี้ทุก ๆ วินาที
- 8.10 ไฟตอนของแสงมีพลังงาน 2.0 eV จงหาความถี่และความยาวคลื่น
- 8.11 จงคำนวณหาความยาวคลื่นที่แผ่ออกมามากที่สุดเมื่อวัตถุดำมีอุณหภูมิต่างๆ ดังต่อไปนี้
ก) 500 K ข) 1,000 K ค) 6,000 K
- 8.12 ถ้าดวงอาทิตย์เป็นวัตถุดำส่งพลังงานรังสีมายังพื้นโลกที่อยู่ห่าง 1.5×10^{11} เมตร ด้วยความเข้ม 1.4×10^3 วัตต์/ตารางเมตรถ้ารัศมีของดวงอาทิตย์มีค่าเท่ากับ 7×10^8 เมตร จงหาอุณหภูมิของดวงอาทิตย์
- 8.13 จะต้องใช้แสงความถี่ต่ำสุดเท่าใด จึงจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากผิวโลหะที่มีค่าฟังก์ชันงาน 1.9 eV ได้
- 8.15 แสงมีความถี่ 7.25×10^{14} Hz เมื่อฉายแสงไปบนโลหะ จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดออกมาด้วยความเร็ว 7×10^5 เมตร/วินาที จงหาความถี่ต่ำสุดที่ทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากผิวโลหะได้



- 8.16 เมื่อฉายแสงความยาวคลื่น 7.25×10^{-7} เมตรลงบนแผ่นโลหะชนิดหนึ่ง จะพอดีทำให้ อิเล็กตรอนหลุดได้ ถ้าเปลี่ยนความยาวคลื่นเป็น 5.5×10^{-7} เมตร จงหา
- ค่าฟังก์ชันงานของโลหะนี้ในหน่วย eV
 - พลังงานแสงในหน่วย eV
 - พลังงานจลน์สูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน
- 8.17 ฉายแสงความยาวคลื่น 2×10^{-7} เมตรไปยังแผ่นอลูมิเนียมซึ่งมีค่าฟังก์ชันงาน 4.2 eV จงหา
- พลังงานสูงสุดของโฟโตอิเล็กตรอน
 - พลังงานต่ำสุดของโฟโตอิเล็กตรอน
 - ศักย์หยุดยั้งที่ต้องใช้
 - ความยาวคลื่นมากที่สุดที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกได้
- 8.18 ینگอนุภาค อัลฟาพลังงาน 7.33 MeV ไปยังนิวเคลียสของธาตุ ทองที่มีเลขอะตอม (Z) = 79 อนุภาคอัลฟา จะเข้าใกล้นิวเคลียสของทองได้มากที่สุดเท่าใด
- 8.19 อิเล็กตรอนและโฟตอนต่างก็มีความยาวคลื่น 2.0 อังสตรอมเท่ากัน แต่ละตัวจะมีโมเมนตัม และพลังงานเป็นเท่าใด
- 8.20 จงหาค่าความต่างศักย์ระหว่างขั้วของหลอดรังสี เอ็กซ์ ที่มีความยาวคลื่นสั้นที่สุด 10^{-11} เมตร
- 8.21 อิเล็กตรอนในหลอดโทรทัศน์ถูกเร่งด้วยความต่างศักย์ 10,000 โวลต์ จงคำนวณหาความถี่สูงสุดของรังสี เอ็กซ์ที่กระจายออกมา เมื่ออิเล็กตรอนกระทบจอโทรทัศน์
- 8.22 ในการทดลองเกี่ยวกับปรากฏการณ์คอมป์ตัน พบว่าโฟตอนรังสีเอ็กซ์ความถี่ 1.5×10^{19} Hz ชนกับอิเล็กตรอนแล้วมีความถี่ 1.2×10^{19} Hz อิเล็กตรอนรับพลังงานจลน์ไปเท่าใด
- 8.23 เหตุใดธรรมชาติแบบคลื่นของวัตถุ จึงไม่ปรากฏให้เห็นชัดในชีวิตประจำวันของเรา
- 8.24 จงใช้ correspondence principle อธิบายอนุภาคที่เคลื่อนที่อยู่ระหว่างผนังแข็งสองข้างและ แสดงให้เห็นว่า เมื่อควันตัมเบอร์มากขึ้นจะมีคุณสมบัติบางอย่างที่ไม่สามารถวัดได้ (กล่าวคือควันไทซ์เซชันของพลังงานและ nonuniformity ของฟังก์ชันของความเป็นไปได้ใน รูป 8.15)
- 8.25 สำหรับอนุภาค ที่เคลื่อนที่อยู่ระหว่างของแข็งสองข้าง ถ้าให้ $n=1$ ความเป็นไปได้ที่จะพบ อนุภาคในปริมาตรเล็กๆ ที่ผิวของผนังด้านใดด้านหนึ่งจะเป็นอย่างไร
- 8.26 ในการวัดตำแหน่งและโมเมนตัมของอิเล็กตรอนพลังงาน 1 KeV นั้น ปรากฏว่าการวัด ตำแหน่งของอิเล็กตรอนมีความไม่แน่นอนเท่ากับ 1 อังสตรอม โมเมนตัมของอิเล็กตรอนจะมีความไม่แน่นอนกี่ %