บทที่ 2 เวกเตอร์

2.1 สเกลาร์และเวกเตอร์

2.2 เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิง 2 และ 3 มิติ

2.3 การรวมเวกเตอร์

2.4 การคูณเวกเตอร์

2.1 สเกลาร์และเวกเตอร์

- สเกลาร์คือปริมาณที่มีเฉพาะขนาดซึ่งบ่งบอกได้ด้วยตัวเลข
- ปริมาณทางฟิสิกส์ที่เป็นสเกลาร์ได้แก่
  - ระยะทาง
  - เวลา
  - อัตราเร็ว
  - อัตราเร่ง
  - งาน
  - พลังงาน
  - อุณหภูมิ

2.1 สเกลลาร์และเวกเตอร์ (ต่อ)

- เวกเตอร์คือปริมาณที่มีขนาดและพร้อมทั้งการบ่งบอกทิศทาง
- สัญญาลักษณ์ของปริมาณเวกเตอร์

- ขนาดของเวกเตอร์ $a = |\boldsymbol{a}|$
- เวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในทิศของ $\boldsymbol{a}$ คือ

$$\boldsymbol{e_a} = \boldsymbol{a} / a$$

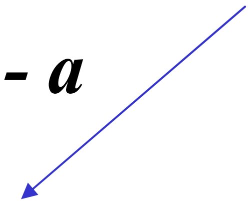
- ปริมาณทางฟิสิกส์ที่เป็นเวกเตอร์ได้แก่
  - การขจัด
  - ความเร็ว
  - ความเร่ง
  - แรงชนิดต่างๆ

2.1 สเกลลาร์และเวกเตอร์ (ต่อ)

- การกลับทิศเวกตอร์

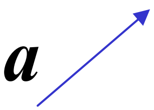
คูณเวกเตอร์ด้วย -1 ***a***

- a



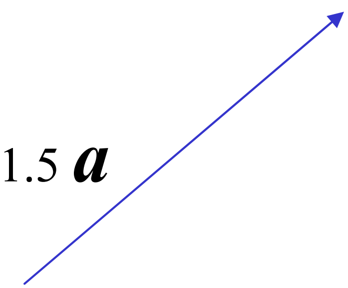
- การย่อขนาดเวกเตอร์

คูณเวกเตอร์ด้วยจำนวนที่น้อยกว่า 1 เช่น 0.5 ***a***



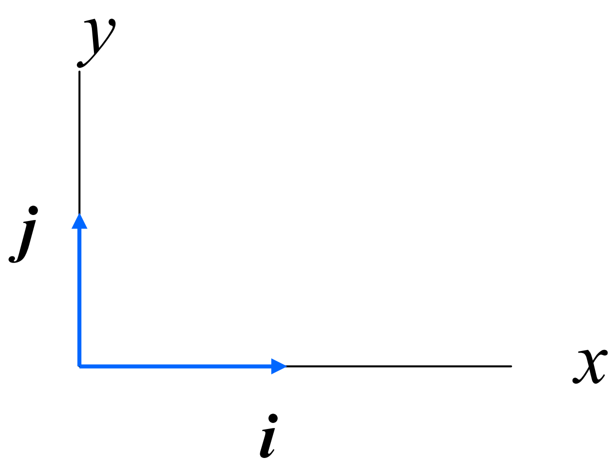
- การขยายขนาดเวกเตอร์

คูณเวกเตอร์ด้วยจำนวนที่มากกว่า 1 เช่น 1.5 ***a***



2.2 เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิง 2 และ 3 มิติ

- เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิงตั้งฉาก 2 มิติ

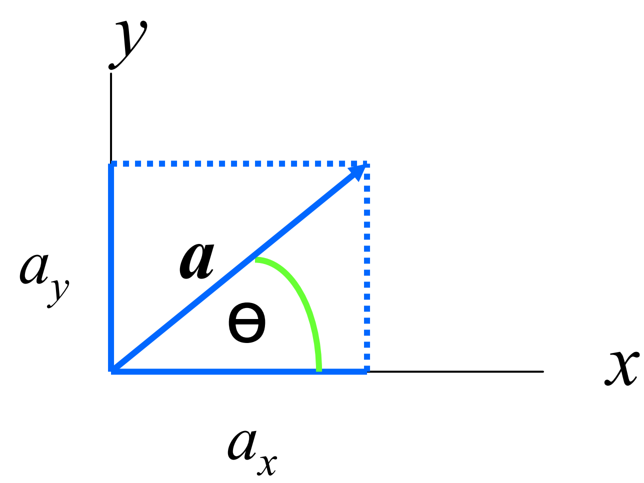


โดยที่ $\boldsymbol{i}$ และ $\boldsymbol{j}$ คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

$$|\,\boldsymbol{i}\,| = |\,\boldsymbol{j}\,| = 1$$

2.2 เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิง 2 และ 3 มิติ (ต่อ)

- เวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ ใดๆใน 2 มิติเขียนได้ดังนี้ $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$



โดยที่ ขนาดของเวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ ที่ฉายลงบนแกน $x \equiv a_x = a \cos \Theta$

ขนาดของเวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ ที่ฉายลงบนแกน $y \equiv a_y = a \sin \Theta$

2.2 เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิง 2 และ 3 มิติ (ต่อ)

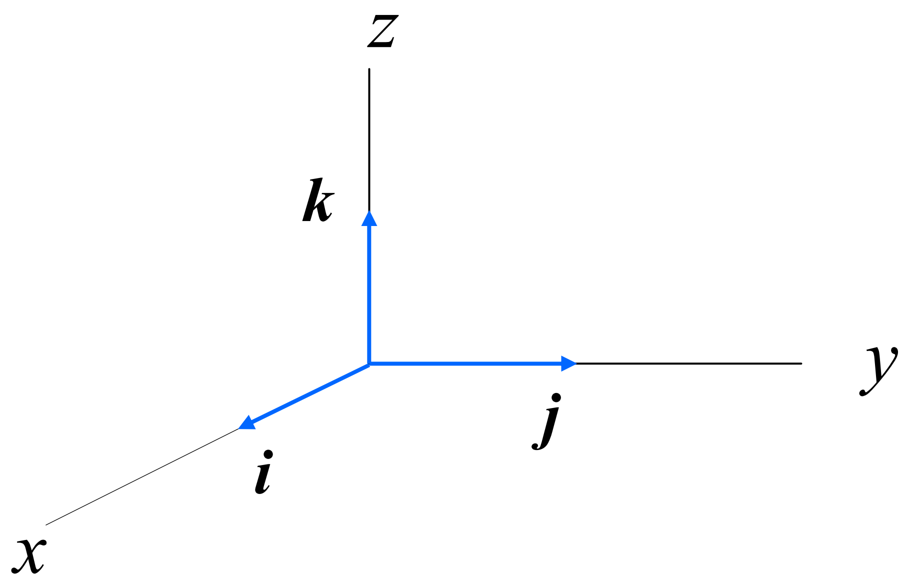
สังเกตว่า

» $a_x^2 + a_y^2 = a^2$

» $\tan \Theta = a_y / a_x$

2.2 เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิง 2 และ 3 มิติ (ต่อ)

- เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิงตั้งฉาก 3 มิติ

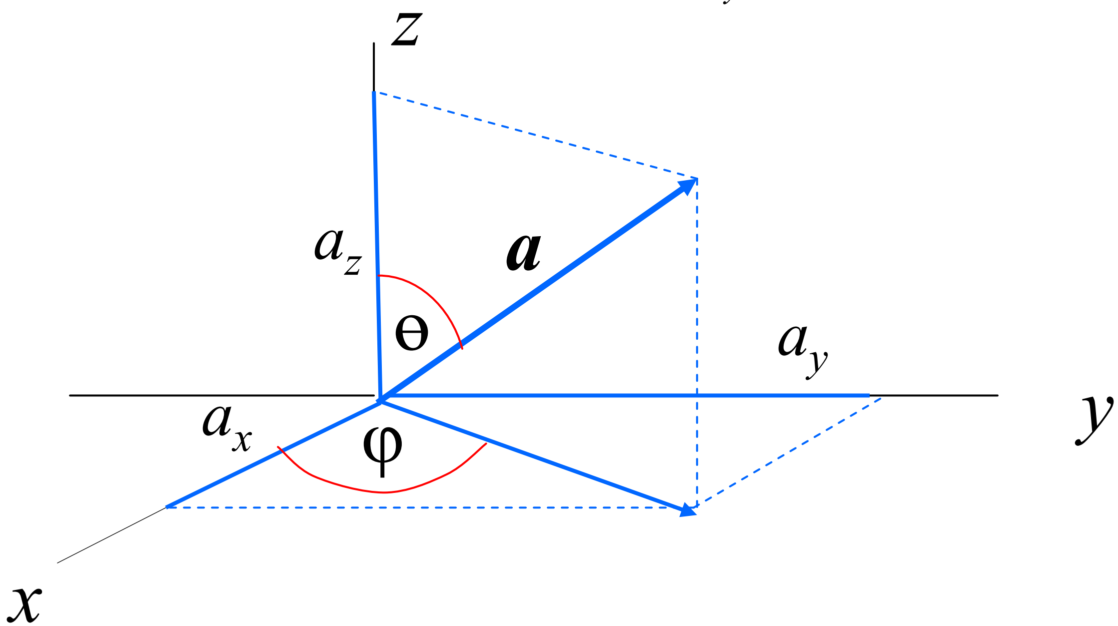


โดยที่ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ และ $\boldsymbol{k}$ คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ

$$|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$$

2.2 เวกเตอร์ในระบบแกนอ้างอิง 2 และ 3 มิติ (ต่อ)

- เวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ ใดๆใน 3 มิติเขียนได้ดังนี้ $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$



โดยที่

$$a_x = a \sin \Theta \cos \varphi$$
$$a_y = a \sin \Theta \sin \varphi$$
$$a_z = a \cos \Theta$$

2.3 การรวมเวกเตอร์

- การรวมเวกเตอร์

ทำได้ 2 วิธีคือ

1. โดยวิธีเขียนรูปภาพ
2. โดยวิธีการรวมตามส่วนประกอบ

2.3 การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

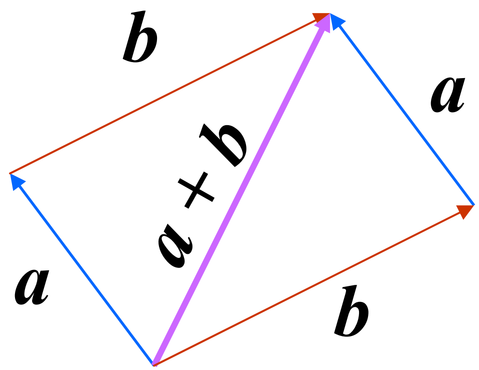
1. โดยวิธีเขียนรูปภาพ

นำหางเวกเตอร์ตัวหนึ่งไปต่อกับหัวเวกเตอร์อีกตัวหนึ่ง

เวกเตอร์ลัพธ์คือ เส้นตรงที่ลากจากหางของเวกเตอร์ตัวแรก
ไปยังหัวของ เวกเตอร์ตัวสุดท้าย

2.3 การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

สมมุติว่า ***a*** และ ***b*** เป็นเวกเตอร์ใดๆ การรวมกันทำได้ดังรูปข้างล่างนี้

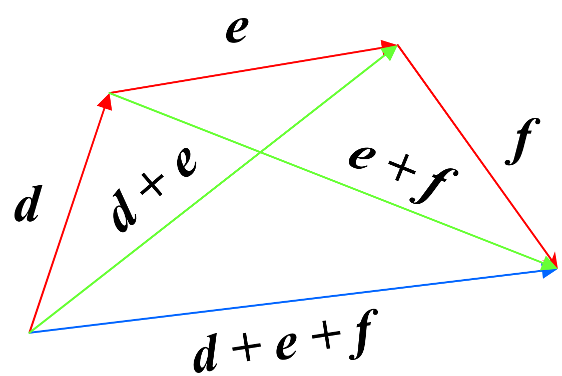


จากรูปจะเห็นว่า $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

หมายความว่า เราสามารถสลับลำดับของการรวมเวกเตอร์ได้

2.3 การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

สมมุติว่า $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ และ $\boldsymbol{f}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ การรวมกันทำได้ดังรูปข้างล่างนี้



จากรูปจะเห็นว่า $\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}) + \boldsymbol{f}$

หมายความว่า เราสามารถสลับกลุ่มของการรวมเวกเตอร์ได้

2.3 การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

- ประโยชน์ของการรวมเวกเตอร์โดยรูป

ในกลศาสตร์ การรวมแรงโดยรูปทำให้เห็นภาพของแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุ

ถ้านำเวกเตอร์แรงทั้งหลายต่อกันแล้วไม่ได้เป็นรูปหลายเหลี่ยมปิด แสดงว่าแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุไม่เป็นศูนย์ วัตถุจะไม่อยู่ในสมดุลของแรงและมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งตามทิศของแรงลัพธ์

แต่ถ้านำเวกเตอร์แรงทั้งหลายต่อกันแล้วได้เป็นรูปหลายเหลี่ยมปิด แสดงว่าแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ วัตถุจะอยู่ในสมดุลของแรงและจะอยู่กับที่หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่

2.3 การรวมเวกเตอร์ (ต่อ)

2. โดยวิธีการรวมตามส่วนประกอบ

เช่น

$$\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\,\boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k}$$

จะได้ว่า

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\,\boldsymbol{k}$$

2.4 การคูณเวกเตอร์

- การคูณเวกเตอร์ตัวหนึ่งเข้ากับเวกเตอร์อีกตัวหนึ่งมี 2 แบบคือ

a) ผลคูณสเกลาร์ (Scalar product)

b) ผลคูณเวกเตอร์ (Vector product)

2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

a) ผลคูณสเกลาร์ (Scalar product)

ผลคูณสเกลาร์คือการคูณเวกเตอร์สองตัวแล้วได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งมีนิยามในการคูณดังนี้

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = ab \cos \Theta$$

โดยที่เวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ และ $\boldsymbol{b}$ มีขนาดเท่ากับ a และ b ตามลำดับ และ Θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

สังเกตว่า

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}$$

2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

จากนิยามผลคูณสเกลาร์ $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = ab\cos\Theta$ จะเห็นว่า

ถ้า $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ และ $\boldsymbol{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y และ z แล้ว

$$\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{i} = 1^2 \cos 0° = 1$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{k} = 1$$

แต่ว่า

$$\boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \bullet \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \bullet \boldsymbol{k} = 0$$

เนื่องจากว่า

$$\cos 90° = 0$$

2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

- ในกรณีที่เวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ และ $\boldsymbol{b}$ เขียนในเทอมของส่วนประกอบดังนี้

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$$

จะได้ว่า

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ ใดๆ

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a} = a^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$$

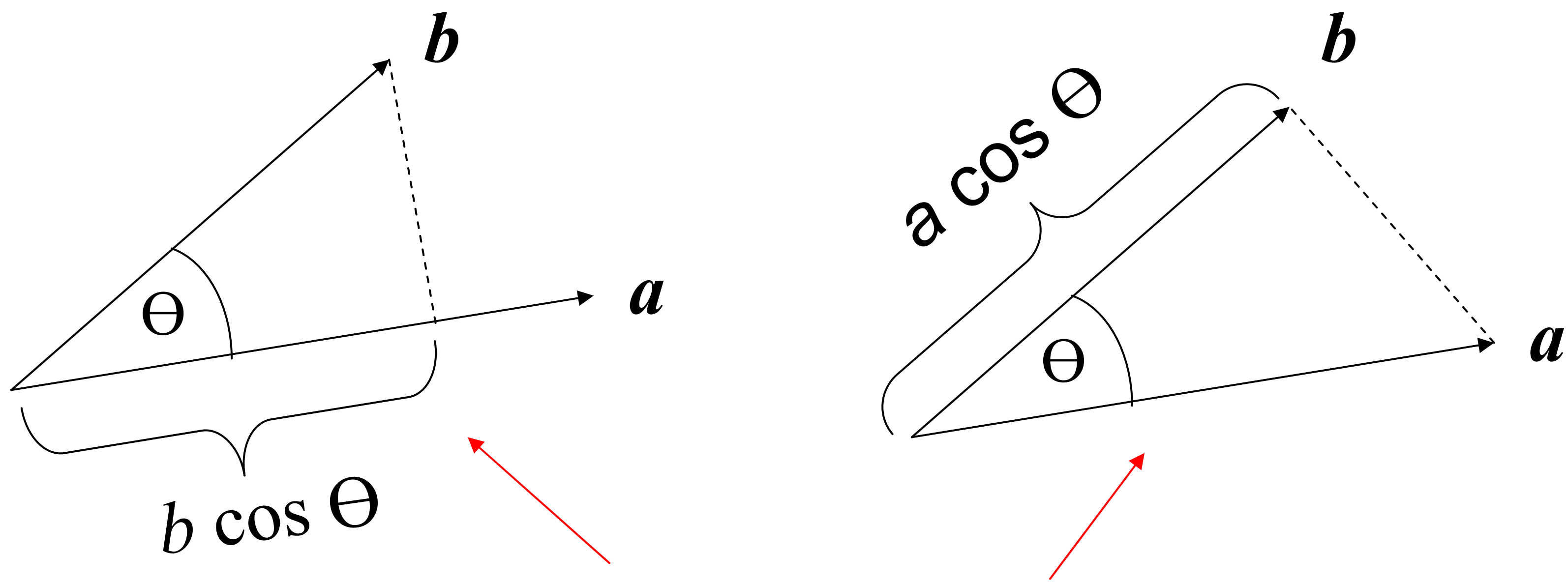
$$a = (a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2)^{1/2}$$

เวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในทิศของ $\boldsymbol{a}$ คือ

$$\boldsymbol{e_a} = \boldsymbol{a} / a$$

2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

- ความหมายของผลคูณสเกลาร์เป็นไปได้ 2 ทาง

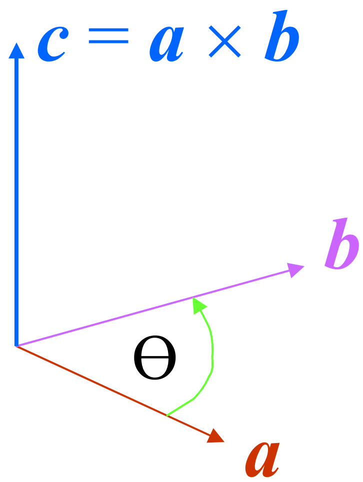


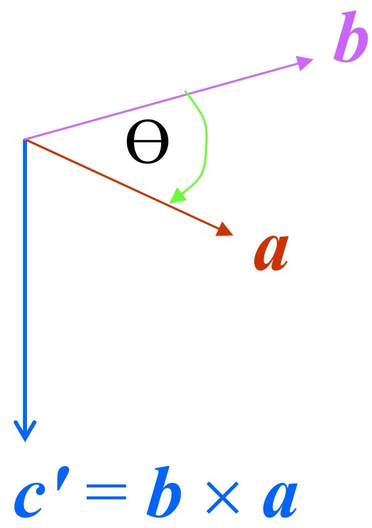
$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a\,(b \cos \Theta) = b\,(a \cos \Theta)$$

2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

b) ผลคูณเวกเตอร์ (Vector product)

ผลคูณเวกเตอร์คือการคูณเวกเตอร์สองตัวแล้วได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์ตัวใหม่ซึ่งตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์ทั้งสองดังรูปข้างล่างนี้





2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

ผลคูณเวกเตอร์มีสัญญาลักษณ์ในการคูณเป็นดังนี้

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

โดยที่ขนาดของเวกเตอร์ $\boldsymbol{c}$ คำนวณได้ตามนิยามนี้

$$c = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab \sin \Theta$$

สังเกตว่า

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

- ตามรูปและนิยามของขนาดข้างต้น ถ้า $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ และ $\boldsymbol{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x, y และ z แล้วจะได้ว่า

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}$$

เนื่องจากว่า $\sin 90° = 1$

สังเกตว่า

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

เนื่องจากว่า $\sin 0° = 0$

2.4 การคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

- ในกรณีที่เวกเตอร์ $\boldsymbol{a}$ และ $\boldsymbol{b}$ เขียนในเทอมของส่วนประกอบดังนี้

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$$

จะได้ว่า

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\, \boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\, \boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\, \boldsymbol{k}$$