งานและพลังงาน

1. บทนำ

หลักของงานและพลังงานเป็นหลักที่มีประโยชน์อย่างมากในฟิสิกส์ กฎการคงตัวของพลังงานสำหรับระบบโดดเดี่ยวเป็นกฎที่นักฟิสิกส์เชื่อว่าเป็นความจริง กฎนี้ทำให้เรารู้ได้ว่ากระบวนการใดบ้างที่ไม่มีทางเป็นไปได้ กระบวนการใดบ้างที่อาจเกิดขึ้นได้ เมื่อพูดถึงพลังงานเรามักนึกถึงความสามารถในการก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลง เช่น การเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่หรือการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ พลังงานมีหลายรูปแบบ แต่เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาเกี่ยวกับพลังงานเชิงกลซึ่งประกอบด้วยพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ พลังงานจลน์เป็นพลังงานที่มีเนื่องจากวัตถุมีการเคลื่อนที่หรือมีความเร็ว ส่วนพลังงานศักย์เป็นพลังงานที่ระบบมีเนื่องจากตำแหน่งของระบบที่อยู่ในสนามของแรง พลังงานทั้งสองชนิดนี้สามารถเปลี่ยนรูปกลับไปมาได้ พลังงานความร้อนอาจถือได้ว่าเป็นพลังงานจลน์เฉลี่ยของระบบที่ประกอบด้วยองค์ประกอบเล็ก ๆ จำนวนมหาศาล

เมื่อเราพูดถึงงาน เรานึกถึงการที่เราทำอะไรให้สำเร็จบางอย่าง และมักจะต้องใช้ความพยายามด้วย ตัวอย่างง่าย ๆ อาจเป็นการย้ายตำแหน่งของวัตถุหรือการเปลี่ยนรูปร่างวัตถุ พิจารณาการตอกเสาเข็ม เราต้องการย้ายตำแหน่งของเสาเข็มให้ลึกลงไปในดิน เดิมเสาเข็มอยู่นิ่ง ถ้าไม่มีแรงมาทำเพิ่มเติมเสาเข็มจะอยู่นิ่งต่อไปตามกฎนิวตันข้อที่หนึ่ง ดังนั้นต้องมีแรงมากระทำต่อเสาเข็มให้มีความเร็วเริ่มต้น แต่เมื่อเสาเข็มเคลื่อนที่ผ่านดินจะมีแรงเสียดทานทำให้เคลื่อนที่ช้าลงแล้วหยุดนิ่งในที่สุด จริง ๆ แล้วเราอาจพิจารณาการตอกเสาเข็มออกเป็นสามตอนด้วยกัน ตอนแรกเป็นการยกก้อนน้ำหนักขึ้นสูงแล้วปล่อยลงมาให้มีความเร็วขนาดหนึ่งก่อนกระทบเสาเข็ม ตอนที่สองเป็นการชนระหว่างเสาเข็มกับก้อนน้ำหนัก แรงที่ก้อนน้ำหนักทำต่อเสาเข็มในเวลาสั้น ๆ ทำให้เสาเข็มมีความเร็วที่จะเคลื่อนที่ไปในดิน เราอาจมองได้ว่าเป็นการถ่ายโมเมนตัมจากก้อนน้ำหนักให้เสาเข็ม ถ้าก้อนน้ำหนักมีมวลมาก ก็มีโมเมนตัมให้ถ่ายเทได้มาก ตอนที่สามเป็นตอนที่เสาเข็มเคลื่อนที่ไปในดิน มีแรงเสียดทานเนื่องจากดินทำให้เสาเข็มหยุดนิ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปได้ระยะหนึ่ง จะเห็นได้ว่าทั้งสามตอนนั้นโดยเนื้อแท้เป็นการเปลี่ยนขนาดความเร็วของวัตถุจากอัตราเร็วหนึ่งเป็นอัตราเร็วอีกขนาดหนึ่ง ตอนแรกเป็นการเปลี่ยนอัตราเร็วของก้อนน้ำหนักจากหยุดนิ่งที่ความสูงขนาดหนึ่งไปให้มีอัตราเร็วขนาดหนึ่งก่อนที่จะกระทบเสาเข็ม ส่วนตอนที่สองเป็นการเปลี่ยนอัตราเร็วของเสาเข็มจากหยุดนิ่งก่อนที่ก้อนน้ำหนักตกกระทบไปให้มีอัตราเร็วขนาดหนึ่งหลังการกระทบทันที ตอนที่สามเป็นการเปลี่ยนอัตราเร็วเสาเข็มหลังจากการกระทบด้วยก้อนน้ำหนักไปเป็นศูนย์หลังจากที่เคลื่อนที่ฝังลงไปในดินได้ระยะทางหนึ่ง เพราะฉะนั้นเราจะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาการเปลี่ยนอัตราเร็วของวัตถุ

2. ทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ในหนึ่งมิติ

เราเริ่มต้นด้วยการพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงก่อน เรียกแนวนี้ว่าแกน X และสมมุติว่าแรงสุทธิ $F_x^{\text{สุทธิ}}$ ที่ทำมีขนาดคงตัว (เราจะขยายผลที่ได้เป็นกรณีทั่วไปที่แรงมีค่าไม่คงตัวภายหลัง) เรารู้ว่าอนุภาคจะมีความเร็วเปลี่ยนไปก็ต่อเมื่อมีแรงมากระทำ และจะมีค่าเปลี่ยนไปมากเมื่อแรงที่มากระทำมีขนาดมากและทำเป็นเวลานานหรือพูดอีกอย่างหนึ่งก็คือเมื่ออนุภาคมีการกระจัดที่มีขนาดมาก เพื่อที่จะพิจารณาผลจากปริมาณทั้งสองพร้อมกัน เราพิจารณาผลคูณระหว่างแรงสุทธิ $F_x^{\text{สุทธิ}}$ และการกระจัด Δx นั่นคือเราจะพิจารณา $F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x$ เราต้องพยายามเปลี่ยนปริมาณนี้ให้อยู่ในรูปของอัตราเร็ว จากกฎนิวตันข้อที่สอง แรงสุทธิมีค่าเท่ากับมวลคูณความเร่งซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนความเร็วเทียบกับเวลา ดังนั้น

$$F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x = ma\Delta x$$

โดยที่ m และ a คือมวลและความเร่งของอนุภาคตามลำดับ .ในกรณีที่ความเร่งคงตัวเรารู้ว่า

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{และ} \qquad \Delta x = \bar{v}\Delta t$$

ดังนั้น

$$F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x = ma\Delta x = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\bar{v}\Delta t = m\bar{v}\Delta v$$

แต่ในกรณีที่ความเร่งคงตัวความเร็วเฉลี่ย $\bar{v}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}(v+u)$ และความเร็วที่เปลี่ยนไป Δv คือ $v-u$ โดยที่ u คือความเร็วต้น เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x = m\bar{v}\Delta v = m\tfrac{1}{2}(v+u)(v-u) = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mu^2$$

แม้ว่าสิ่งที่เราได้จะไม่ใช่การเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วโดยตรง แต่ก็ทำให้เราสามารถหาอัตราเร็วใหม่ได้ถ้าเรารู้อัตราเร็วต้นและปริมาณ $F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x$ เช่น ในตัวอย่างการตอกเสาเข็ม ตอนที่เราปล่อยก้อนน้ำหนักลงมาเป็นระยะทางหนึ่ง แรงโน้มถ่วงกระทำต่อก้อนน้ำหนักในระยะทางหนึ่งทำให้มีอัตราเร็วขนาดหนึ่งก่อนที่จะกระทบเสาเข็ม ในทางกลับกันถ้าเรารู้อัตราเร็วต้นและอัตราเร็วปลายเราก็สามารถหา $F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x$ ได้ และถ้าเรารู้แรงสุทธิเราก็จะหาได้ว่าวัตถุมีการกระจัดไปเท่าไร เราเรียกปริมาณแรงสุทธิคูณการกระจัดหรือ $F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x$ ว่า*งาน*โดยแรงสุทธิเมื่อมีการกระจัด Δx ส่วนปริมาณหนึ่งส่วนสองคูณมวลคูณอัตราเร็วยกกำลังสอง หรือ $\frac{1}{2}mv^2$ นั้นเรียกว่า*พลังงานจลน์*ซึ่งเป็นพลังงานเนื่องจากการมีอัตราเร็วเพราะเมื่อไปชนวัตถุอื่นจะทำให้มีแรงกระทำให้วัตถุอื่นเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนรูปร่างได้ เพื่อเป็นการเน้นว่าการใช้ความสัมพันธ์ข้างบนนั้นจะต้องมีตำแหน่งสองตำแหน่ง เราจะสมมุติว่าอนุภาคมีการกระจัดจากตำแหน่ง A ไปยังตำแหน่ง B และเขียนสมการข้างบนว่า

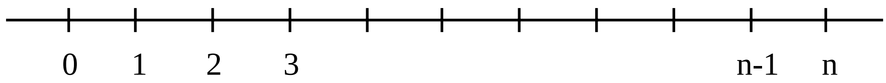
งานโดยแรงสุทธิเมื่ออนุภาคมีการกระจัดจาก A ไป B มีค่าเท่ากับผลต่างพลังงานจลน์จาก A ไป B

หรือ ถ้าให้ $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}}$ เป็นงานโดยแรงสุทธิเมื่ออนุภาคมีการกระจัดจาก A ไป B และให้ E_k แทนพลังงานจลน์ เราเขียนสมการนี้ในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}} = \Delta E_{k;\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

ในกรณีที่แรงสุทธิมีค่าไม่คงตัว ความสัมพันธ์ข้างบนนี้ก็ยังเป็นจริงอยู่ เราพิสูจน์ดังนี้

แบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ จำนวนมาก โดยที่แต่ละช่วงสั้นมากจนประมาณได้ว่าแรงคงตัว ให้ตำแหน่งเริ่มต้นเป็นตำแหน่งที่ 0 ตำแหน่งปลายช่วงที่หนึ่งเป็นตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งต้นช่วงที่ 2 คือตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งปลายช่วงที่สองเป็นตำแหน่งที่ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงช่วงสุดท้ายให้ตำแหน่งต้นช่วงเป็นตำแหน่งที่ n-1 และตำแหน่งปลายช่วงเป็นตำแหน่งที่ n ดังรูป 2.1



รูป 2.1

เนื่องจากเราประมาณได้ว่าแรงคงตัวในแต่ละช่วง ดังนั้นจากที่เราได้ทำมา เราจะได้ว่า

$$W_{0\to 1}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_{1\to 2}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$$W_{2\to 3}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_3^2 - \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

....

$$W_{\mathrm{n}-1\to \mathrm{n}}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{n}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{n}-1}^2$$

บวกสมการทั้งหมดเข้าด้วยกัน เราจะได้ว่า

$$W_{0\to \mathrm{n}}^{\text{สุทธิ}} = W_{0\to 1}^{\text{สุทธิ}} + W_{1\to 2}^{\text{สุทธิ}} + \ldots + W_{\mathrm{n}-1\to \mathrm{n}}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{n}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

หรือถ้าให้ A เป็นตำแหน่งตั้งต้นที่ 0 และ B เป็นตำแหน่งสุดท้ายที่ n เราจะได้ว่า

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 = \Delta E_{\mathrm{k;A}\to\mathrm{B}}$$

ตามที่ต้องการพิสูจน์

3. ทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ในระนาบและในสามมิติ

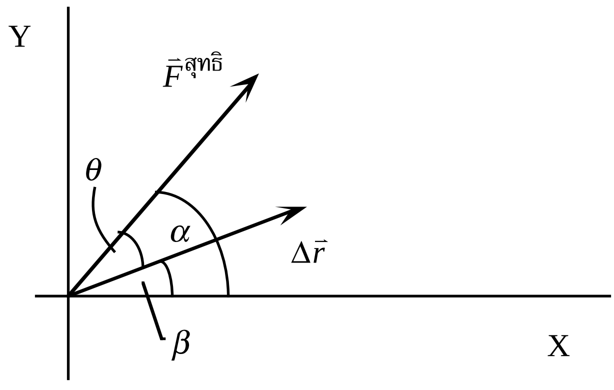
ในกรณีการเคลื่อนที่ในระนาบ เลือกแกน X และแกน Y ที่ตั้งฉากกันเป็นแกนอ้างอิง และแตกแรงสุทธิและการกระจัดให้อยู่ในแนวทั้งสองนี้ เราสามารถใช้ผลที่ได้ทำมาแล้วสำหรับแต่ละแกนได้ นั่นคือ

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{B},x}^2 - \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{A},x}^2 \qquad \text{และ}$$
$$F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{B},y}^2 - \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{A},y}^2$$

บวกสมการทั้งสองเข้าด้วยกัน เราจะได้

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{B},x}^2 + \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{B},y}^2 - \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{A},x}^2 - \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{A},y}^2 = \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}^2 - \tfrac{1}{2} m v_{\mathrm{A}}^2$$

โดยที่เราใช้ความรู้ที่ว่า $v_x^2 + v_y^2 = v^2$ ซ้ายมือของสมการบนอยู่ในรูปขององค์ประกอบของแรงและการกระจัดซึ่งเป็นปริมาณที่ขึ้นกับการวางตัวของแกนอ้างอิง เราสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของขนาดของแรงและขนาดของการกระจัดได้ดังนี้ ให้ α และ β เป็นมุมที่แรงและการกระจัดทำกับแกน X ดังรูป 3.1



รูป 3.1

เราเห็นได้ว่า $F_x^{\text{สุทธิ}} = F^{\text{สุทธิ}} \cos\alpha,\ F_y^{\text{สุทธิ}} = F^{\text{สุทธิ}} \sin\alpha$ และ $\Delta x = \Delta r \cos\beta,\ \Delta y = \Delta r \sin\beta$ โดยที่ $F^{\text{สุทธิ}}$ และ Δr คือขนาดของแรงสุทธิและการกระจัดตามลำดับ

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} &= F^{\text{สุทธิ}} \cos\alpha \Delta r \cos\beta + F^{\text{สุทธิ}} \sin\alpha \Delta r \sin\beta \\ &= F^{\text{สุทธิ}} \Delta r (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= F^{\text{สุทธิ}} \Delta r \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

โดยที่ในบรรทัดสุดท้ายเราได้ใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ ถ้าเราให้ θ เป็นมุมระหว่างแรงสุทธิและการกระจัดดังในรูป 3.1 เราจะได้ว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_y^{\text{สุทธิ}}\Delta y_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = F^{\text{สุทธิ}}\Delta r\cos\theta$$

เราเรียกปริมาณนี้ว่า*งานโดยแรงสุทธิ*

เราสามารถขยายนิยามนี้ออกไปยังกรณีการเคลื่อนที่ในสามมิติ ถ้าเราเลือกให้แกน X แกน Y และแกน Z เป็นแกนสามแกนที่ตั้งฉากกัน เราก็สามารถแสดงให้เห็นว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_y^{\text{สุทธิ}}\Delta y_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_z^{\text{สุทธิ}}\Delta z_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = F^{\text{สุทธิ}}\Delta r\cos\theta = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2$$

เรามักใช้สัญลักษณ์ W แทนงาน เพราะฉะนั้นเราเขียน $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}}$ แทนงานโดยแรงสุทธิจาก A ไป B สมการบนจึงกลายเป็น

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2$$

โดยที่ $$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}} = F_x^{\text{สุทธิ}}\Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_y^{\text{สุทธิ}}\Delta y_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_z^{\text{สุทธิ}}\Delta z_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = F^{\text{สุทธิ}}\Delta r\cos\theta$$

โดยการใช้เหตุผลในลักษณะเดียวกันกรณีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าความสัมพันธ์ข้างบนนี้เป็นจริงในกรณีที่แรงมีค่าไม่คงตัวและการเคลื่อนที่เป็นแบบโค้งทั่วไป

แทนที่เราจะบวกแรงทั้งหมดแบบเวกเตอร์เป็นแรงสุทธิ แล้วหางานโดยแรงสุทธิ เราสามารถคำนวณงานโดยแรงสุทธิได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้ สมมุติว่า

$$\vec{F}^{\text{สุทธิ}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$$

ซึ่งหมายความว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}} = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} + \ldots,\ \ F_y^{\text{สุทธิ}} = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} + \ldots,\ \ F_z^{\text{สุทธิ}} = F_{1,z} + F_{2,z} + F_{3,z} + \ldots$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในนิยามของงานโดยแรงสุทธิ เราจะได้ว่า

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\mathbf{F}_1} + W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\mathbf{F}_2} + W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\mathbf{F}_3} + \ldots$$

โดยที่เราได้ให้นิยามงานโดยแรง $\vec{F}_1$ เมื่อมีการกระจัดจาก A ไป B และ อื่น ๆ ดังนี้

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\mathbf{F}_1} = F_{1,x}\Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_{1,y}\Delta y_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + F_{1,z}\Delta z_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = F_1\Delta r\cos\theta_1 \quad \text{และอื่น ๆ}$$

ดังนั้นเราสามารถคำนวณงานโดยแรงสุทธิได้โดยการคำนวณงานโดยแรงอื่น ๆ ก่อน แล้วจึงเอางานทั้งหมดมาบวกกัน วิธีนี้อาจสะดวกกว่าเพราะเป็นการบวกปริมาณสเกลาร์ ในขณะที่ถ้าเราหางานโดยแรงสุทธิโดยตรง เราต้องบวกแรงทั้งหมดแบบเวกเตอร์ซึ่งเป็นการยากกว่า

หมายเหตุ: ในการคำนวณงาน เราต้องพูดให้ชัดเจนว่าเป็นงานที่กระทำต่ออนุภาคใดโดยแรงใดตามเส้นทางอะไร เราต้องบอกทุกปริมาณที่ขีดเส้นใต้ให้ครบ

เราจะพบว่ามีแรงหลายแรงที่*งานโดยแรงเหล่านั้นมีค่าไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่*และงานที่ได้อยู่ในรูปสูตรที่จำง่าย เราเรียกแรงชนิดนี้ว่า*แรงอนุรักษ์* (conservative force) ตัวอย่างแรงเหล่านี้ที่สำคัญคือ แรงโน้มถ่วง แรงสปริง และแรงไฟฟ้าสถิต

4. งานโดยแรงสามัญบางแรง

4.1 งานโดยแรงคงตัว

พิจารณากรณีพิเศษที่แรงซึ่งกระทำต่ออนุภาคมีค่าคงตัว นั่นคือมีขนาดและทิศเดียวกันทุกแห่ง ตัวอย่างเช่นแรงโน้มถ่วงของโลกที่บริเวณผิวโลก

4.1.1 งานที่ทำตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ

ก่อนอื่นพิจารณางานที่ทำตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ จากนิยามของงาน

$$W = F\Delta r\cos\theta$$

แต่ $\Delta r\cos\theta$ คือองค์ประกอบของการกระจัดในทิศของแรง เพราะฉะนั้นเราเขียนได้ว่า

งาน = ขนาดของแรง คูณ องค์ประกอบของการกระจัดในทิศของแรง หรือ $W = F\Delta r_F$

โดยที่ Δr_F คือองค์ประกอบของการกระจัดในทิศของแรง

อีกทางหนึ่งเราอาจมองว่า $F\cos\theta$ คือองค์ประกอบของแรงในทิศของการกระจัด และเขียนว่า

งาน = องค์ประกอบของแรงในทิศของการกระจัด คูณ ขนาดของการกระจัด หรือ $W = F_{\Delta r}\Delta r$

โดยที่ $F_{\Delta r}$ คือองค์ประกอบของแรงในทิศของการกระจัด

4.1.2 งานที่ทำตามเส้นทางยาว ๆ

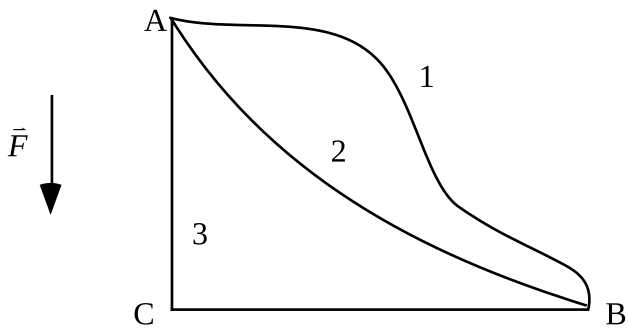
เนื่องจากในกรณีนี้แรงมีค่าคงตัว เราจะใช้ทิศของแรงเป็นทิศอ้างอิง และใช้นิยามงานในรูป $W = F\Delta r_F$ เราแบ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ ซึ่งประมาณว่าเป็นเส้นตรงได้ งานที่ทำทั้งหมดมีค่าประมาณเท่ากับผลบวกของงานในแต่ละช่วง

$$W = W_1 + W_2 + ... = F\Delta r_{1F} + F\Delta r_{2F} + ... = F(\Delta r_{1F} + \Delta r_{2F} + ...)$$

เพราะว่าแรงมีขนาดเท่ากับ F ทุกแห่ง แต่ $\Delta r_{1F} + \Delta r_{2F} + ...$ คือผลบวกขององค์ประกอบของการกระจัดทั้งหมดซึ่งมีค่าเท่ากับองค์ประกอบ D_F ของการกระจัดทั้งหมดในทิศของแรง ดังนั้น

$\boxed{W = FD_F \text{ เมื่อแรง } \vec{F} \text{ มีค่าคงตัว และ } D_F \text{ คือองค์ประกอบของการกระจัดทั้งหมดในทิศของแรง}}$

งานที่ได้ในกรณีนี้มีค่าขึ้นกับการกระจัดทั้งหมดจากจุดตั้งต้นไปยังจุดสุดท้าย แต่*ไม่ขึ้นกับเส้นทาง*การเคลื่อนที่ ดังนั้นงานที่ทำโดยแรงคงตัวมีค่าเท่ากันหมดใน*ทุก*เส้นทางที่เชื่อมระหว่างจุดตั้งต้นไปยังจุดสุดท้ายคู่เดียวกัน

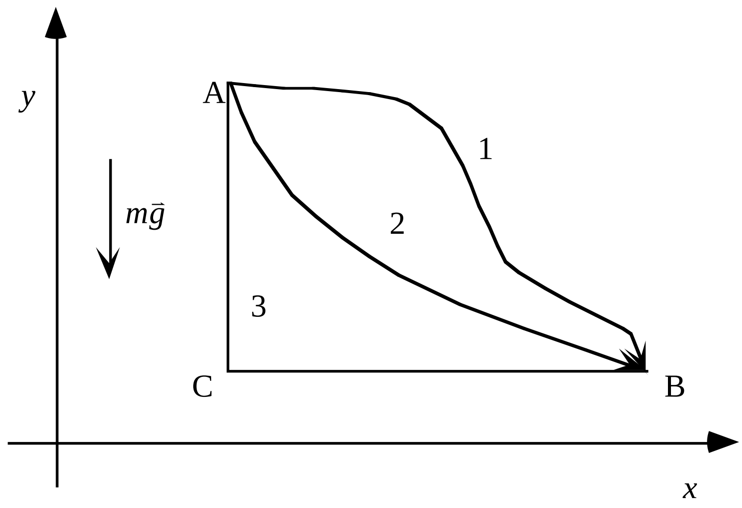


รูป 4.1.2

ในรูป 4.1.2 งานโดยแรง $\vec{F}$ คงตัวบนเส้นทาง 1, 2 และ 3 มีค่าเท่ากันหมด เพราะมีองค์ประกอบของการกระจัดทั้งหมดในทิศของแรง $\vec{F}$ เท่ากัน ดังนั้นในการคำนวณงานโดยแรงคงตัว ไม่ว่าจริง ๆ แล้วอนุภาคจะเคลื่อนที่ไปบนเส้นทางซับซ้อนอย่างไร เราสามารถเลือกคำนวณบนเส้นทางที่ง่าย เช่น เส้นทาง 3 จาก A ไป C ไป B

4.1.3 งานโดยแรงโน้มถ่วง

ที่บริเวณผิวโลกเราอาจประมาณได้ว่าแรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อวัตถุมีมวลมีค่าเท่ากันทุกแห่ง ดังนั้นเราใช้ผลที่ได้ในหัวข้อ 4.1.2 ได้



รูป 4.1.3

งานโดยแรง $m\vec{g}$ จาก A ไป B มีค่าเท่ากับ $mg(y_A - y_B) = mgy_A - mgy_B$ โดยที่แกน Y เป็นแกนที่มีทิศชี้ขึ้นสวนกับทิศของ $\vec{g}$ และ y_A, y_B คือพิกัดของ A และ B ในแนวแกน Y ตามลำดับ

4.1.4 งานโดยแรงเสียดทาน

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่งบนพื้นราบ เนื่องจากไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ขนาดของแรงปฏิกิริยาตั้งฉากที่พื้นกระทำต่ออนุภาคมีค่าเท่ากับขนาดของน้ำหนักของอนุภาคเสมอ แรงเสียดทานจลน์ที่พื้นกระทำต่ออนุภาคมีขนาดคงที่ด้วย แต่ว่าทิศของแรงเสียดทานไม่จำเป็นต้องคงที่เพราะว่าแรงเสียดทานมีทิศตรงข้ามกับการกระจัดของอนุภาคเทียบกับพื้นในขณะนั้นเสมอ

เมื่ออนุภาคมีการกระจัดเป็นระยะทาง Δs สั้น ๆ ไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่ งานที่แรงเสียดทานกระทำต่ออนุภาคมีค่าเท่ากับ

$$f(-\Delta s) = -f\Delta s$$

เพราะว่าองค์ประกอบของการกระจัดของอนุภาคในทิศของแรงคือ $-\Delta s$ งานมีค่าเป็นลบเพราะการกระจัดมีทิศ*ตรงข้าม* กับแรงเสียดทาน

งานที่แรงเสียดทานทำตลอดทั้งเส้นทางมีค่าเท่ากับผลบวกของงานในช่วงสั้น ๆ ทั้งหมด

$$W = (-f\Delta s_1) + (-f\Delta s_2) + ... + (-f\Delta s_n) = -fL$$

โดยที่ $\Delta s_1, \Delta s_2, ...$ คือระยะทางในช่วงที่ 1, 2,... และ L เป็นระยะทางทั้งหมดที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ เพราะฉะนั้น ในกรณีที่แรงเสียดทานมีค่าคงตัว

งานเนื่องจากแรงเสียดทาน = - ขนาดของแรงเสียดทาน คูณ ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้

หมายเหตุ: งานเนื่องจากแรงเสียดทานมีค่าขึ้นกับเส้นทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไป เพราะระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ขึ้นกับเส้นทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปจริง ๆ

4.1.5 งานโดยแรงสปริง

แรงที่สปริงทำมีขนาดแปรผันตรงกับความยาวที่เปลี่ยนไปจากความยาวธรรมชาติตอนที่ยังไม่มีแรงใดกระทำ แต่มีทิศตรงข้ามกับความยาวที่เปลี่ยนไป นั่นคือ ถ้าสปริงยืดออก แรงสปริงจะดึงเข้า แต่ถ้าสปริงหดสั้นลง สปริงจะดันออก ในรูปของสัญลักษณ์

$$F = -kx$$

โดยที่ F คือแรงที่สปริงทำ x คือความยาวที่เปลี่ยนไปจากความยาวธรรมชาติของสปริง และ k คือค่าคงตัวของการแปรผัน เรียกอีกอย่างว่า*ค่าคงตัวของสปริง*

พิจารณางานที่แรงสปริงทำต่ออนุภาคซึ่งผูกติดกับปลายของสปริงเมื่ออนุภาคเปลี่ยนตำแหน่งจาก x_A ไป x_B เนื่องจากแรงสปริงมีค่าไม่คงตัว เราต้องแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ จนประมาณว่าแรงสปริงในแต่ละช่วงมีค่าคงตัว สมมุติว่าเราแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงต่อไปนี้ $x_0 \to x_1,\ x_1 \to x_2,\ .....,\ x_{n-1} \to x_n$ โดยที่ x_0 คือ x_A และ x_n คือ x_B

แรงสปริง $F_1, F_2, .., F_n$ ในช่วงที่ 1, 2, ..,n มีค่าประมาณเท่ากับ $-kx_1,\ -kx_2,\ ..,\ -kx_n$ ตามลำดับ ดังนั้นงานที่แรงสปริงทำในแต่ละช่วงจะมีค่าประมาณดังนี้

ช่วงที่ 1 $W_1 = -kx_1(x_1 - x_0)$

ช่วงที่ 2 $W_2 = -kx_2(x_2 - x_1)$

$\cdots$

ช่วงที่ n $W_n = -kx_n(x_n - x_{n-1})$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราแบ่งให้การกระจัดในแต่ละช่วงเท่ากัน นั่นคือ แบ่งให้

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = .. = x_n - x_{n-1} = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{\Delta x}{n}$$

เราจะได้ว่างานทั้งหมดมีค่าประมาณเท่ากับ

$$W_1 + W_2 + .. + W_n = -kx_1\frac{\Delta x}{n} - kx_2\frac{\Delta x}{n} - ... - kx_n\frac{\Delta x}{n} = -k\frac{\Delta x}{n}(x_1 + x_2 + .. + x_n)$$

แต่ $x_1 = x_0 + \frac{\Delta x}{n},\ x_2 = x_0 + 2\frac{\Delta x}{n}, ...,\ x_n = x_0 + n\frac{\Delta x}{n}$

ดังนั้น $(x_1 + x_2 + .. + x_n) = nx_0 + \frac{\Delta x}{n}(1 + 2 + .. + n) = nx_0 + \frac{\Delta x}{n}\frac{n}{2}(n+1) = nx_0 + \frac{(n+1)\Delta x}{2}$

เพราะฉะนั้น งานทั้งหมดมีค่าประมาณ

$$W_1 + W_2 + .. + W_n = -k\frac{\Delta x}{n}(x_1 + x_2 + .. + x_n) = -k\frac{\Delta x}{n}\left[nx_0 + \frac{(n+1)\Delta x}{2}\right]$$

ค่างานที่ถูกต้องเป็นค่าที่ได้เมื่อเราแบ่งช่วงให้สั้นมาก ๆ จนกระทั่งจำนวนช่วง n มีค่าเข้าหาอนันต์ ในกรณีนี้ n มีค่าประมาณเท่ากับ $n+1$ และงานที่ทำมีค่าเท่ากับ

$$W_1 + W_2 + .. + W_n = -k\Delta x\left[x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right] = -k(x_n - x_0)\frac{1}{2}(2x_0 + \Delta x)$$
$$= -\frac{k}{2}(x_n - x_0)(x_0 + x_0 + \Delta x)$$

แต่ $x_0 + \Delta x = x_n$ ดังนั้น

$$W_1 + W_2 + .. + W_n = -\frac{k}{2}(x_n - x_0)(x_0 + x_0 + \Delta x) = -\frac{k}{2}(x_n - x_0)(x_0 + x_n)$$
$$= -\frac{k}{2}(x_n^2 - x_0^2)$$

แต่ x_0 คือ x_A และ x_n คือ x_B ดังนั้น งานที่แรงสปริงทำต่ออนุภาคเมื่ออนุภาคเคลื่อนจาก x_A ไป x_B มีค่า

$$W_{A\to B}^{\text{สปริง}} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

งานที่คำนวณได้นี้เป็นงานสำหรับการเคลื่อนที่ไปทางเดียว แต่ใช้ได้ไม่ว่าจะเป็นการเคลื่อนที่ซึ่งสปริงยืดออกหรือว่าหดเข้า สำหรับการเคลื่อนที่ซึ่งกลับทิศไปมา เราสามารถคำนวณได้โดยการแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นตอน ๆ โดยให้แต่ละตอนเป็นการเคลื่อนที่ไปทางเดียว คำนวณงานที่ทำในแต่ละตอน แล้วเอาผลที่ได้มาบวกกัน ตัวอย่างเช่น งานเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จาก A ไป C แล้วย้อนทางกลับจาก C ไป B หาได้จาก

$$W_{A\to C\to B}^{\text{สปริง}} = W_{A\to C}^{\text{สปริง}} + W_{C\to B}^{\text{สปริง}} = \left[\frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_C^2\right] + \left[\frac{1}{2}kx_C^2 - \frac{1}{2}kx_B^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

ดังนั้นไม่ว่าอนุภาคจะเคลื่อนที่กลับไปมาตามเส้นทางอย่างไร งานที่ทำโดยแรงสปริงจากจุด A แล้วไปจบที่จุด B มีค่า

$$W_{A\to B}^{\text{สปริง}} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \qquad \text{เสมอ}$$

5. กำลัง

บ่อยครั้งเราสนใจเวลาที่ใช้ทำงานว่ามากน้อยแค่ไหน งานที่ทำในเวลาที่สั้นกว่าย่อมมีประสิทธิภาพสูงกว่างานเท่ากันที่ใช้เวลามากกว่า ดังนั้นเราสนใจอัตราการทำงาน

5.1 นิยาม *กำลังเฉลี่ย* ของแรงที่กระทำต่ออนุภาคในช่วงเวลาใดก็ตามมีค่าเท่ากับงานที่ทำโดยแรงนั้นหารด้วยเวลาที่ใช้

หน่วยของงานและกำลัง

โดยนิยามของงานว่าเป็นขนาดของแรงคูณกับองค์ประกอบของกการกระจัดในทิศของแรง งานจึงมีหน่วยของแรงคูณกับระยะทาง ในระบบ SI หน่วยของงานคือ นิวตัน เมตร (N.m) ซึ่งมีชื่อเรียกอีกชื่อว่า จูล (joule) ใช้สัญลักษณ์ย่อว่า J

ดังนั้น หน่วยของกำลังในระบบ SI คือ จูลต่อวินาที ซึ่งมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าวัตต์ (watt) ใช้สัญลักษณ์ย่อว่า W

5.2 กำลังที่เวลาขณะหนึ่ง

งานที่ทำโดยแรง $\vec{F}$ ต่ออนุภาคเมื่ออนุภาคมีการกระจัด $\Delta\vec{r}$ สั้น ๆ คือ $\left|\vec{F}\right|\cos\theta\left|\Delta\vec{r}\right|$ โดยที่ θ คือมุมระหว่างแรงและการกระจัด

ดังนั้นกำลังที่แรงนี้ให้กับอนุภาคในช่วงเวลา Δt สั้น ๆ คือ

$$\left|\vec{F}\right|\cos\theta\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t}$$

ในกรณีที่ช่วงเวลาสั้นมากจนเข้าหาศูนย์ จะได้ว่ากำลังที่เวลานั้นคือ

$$P = \left|\vec{F}\right|\cos\theta\left|\vec{v}\right|$$

เพราะว่า $\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t} = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$ คือขนาดของความเร็วของอนุภาคเมื่อช่วงเวลาเข้าหาศูนย์

พลังงานศักย์และกฎพลังงาน

6. แรงอนุรักษ์

แรงคงตัว (แรงโน้มถ่วงที่ผิวโลก) และแรงสปริงมีลักษณะพิเศษตรงที่ว่างานที่ทำโดยแรงทั้งสองไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่หรืออัตราเร็วของอนุภาค แต่ขึ้นกับตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้ายของอนุภาคเท่านั้น แรงซึ่งมีคุณสมบัติเช่นนี้เรียกว่า*แรงอนุรักษ์* เหตุที่เรียกว่าแรง*อนุรักษ์*เพราะแรงชนิดนี้ทำให้เราสามารถให้นิยามพลังงานเชิงกลซึ่งมีค่า*คงตัว*

นิยาม แรงอนุรักษ์ คือแรงซึ่งงานที่ทำโดยแรงนี้จากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งมีค่าเท่ากันในทุกเส้นทางซึ่งเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง

ตามที่กล่าวมาแล้ว แรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลกและแรงสปริงเป็นแรงอนุรักษ์ แต่แรงเสียดทานไม่ใช่แรงอนุรักษ์

7. พลังงานศักย์เนื่องจากแรงอนุรักษ์

เนื่องจากงานโดยแรงอนุรักษ์ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ เราสามารถใช้ความจริงข้อนี้เป็นประโยชน์เมื่อเราต้องคำนวณงานที่ทำโดยแรงนี้บนเส้นทางที่ซับซ้อนได้โดยเราเลือกเส้นทางง่าย ๆ ที่เชื่อมระหว่างจุดตั้งต้นและจุดสุดท้ายเดียวกัน

นอกจากนั้น ถ้าเราได้เคยคำนวณงานจากจุดใด ๆ ไปยังจุดอ้างอิงจุดหนึ่ง เราสามารถหางานที่ทำระหว่างสองจุดใด ๆ ได้จากงานที่เคยคำนวณไว้แล้วดังนี้

สมมุติว่าเราเลือกจุด S เป็นจุดอ้างอิง และเรารู้ว่างานที่ทำจากจุด A และ B ใด ๆ ไปยังจุด S มีค่าเท่าไร แทนที่เราจะเดินทางจาก A ไปยัง S โดยตรง เราอาจเดินทางผ่านไปทาง B ก่อน แล้วค่อยไปหา S เนื่องจากงานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ งานที่ทำบนเส้นทางทั้งสองมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{S}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + W_{\mathrm{B}\to\mathrm{S}}$$

หรือ

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{S}} - W_{\mathrm{B}\to\mathrm{S}}$$

สมการข้างบนแสดงให้เราเห็นว่างานระหว่างจุด A และจุด B สองจุดใด ๆ สามารถหาได้จากลบกันง่าย ๆ ถ้าเรารู้ค่างานที่ทำจากแต่ละจุดไปยังจุดอ้างอิง S ถ้าเราย้อนกลับไปดูรูปแบบคำตอบที่เราได้จากการคำนวณงานเนื่องจากแรงโน้มถ่วงคงตัวและแรงสปริง เราจะเห็นว่าคำตอบอยู่ในรูปแบบข้างบน

นั่นคือ

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{m\vec{g}} = mgy_{\mathrm{A}} - mgy_{\mathrm{B}}$$

และ

$$W_{A\to B}^{\text{สปริง}} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

รูปแบบของสมการของงานแนะว่าเราควรตั้งชื่อเฉพาะสำหรับงานจากจุดใด ๆ ไปยังจุดอ้างอิง เราให้นิยามปริมาณ U_{A} ดังนี้

$$U_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{S}}$$

เราเรียกปริมาณนี้ว่า*พลังงานศักย์*ของอนุภาคที่จุด A เทียบกับจุดอ้างอิง S

นิยาม พลังงานศักย์ U_{A} ที่จุด A ของอนุภาคเนื่องจากแรงอนุรักษ์เทียบกับจุดอ้างอิง S จุดหนึ่ง คืองาน $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{S}}$ ที่แรงอนุรักษ์กระทำต่ออนุภาคในการเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางใด ๆ จากจุด A ไปยังจุดอ้างอิง S

ความสัมพันธ์ระหว่างงานและพลังงานศักย์ ในรูปของพลังงานศักย์ เราสามารถเขียนงานจากจุด A ไปยังจุด B ได้ว่า

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{แรงอนุรักษ์}} = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} = -\left(U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}}\right) = -\Delta U_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

ดังนั้นถ้าเรารู้พลังงานศักย์ของอนุภาค เราสามารถคำนวณงานที่กระทำต่ออนุภาคโดยแรงอนุรักษ์ได้ง่าย ๆ จากค่าลบของพลังงานศักย์ที่เปลี่ยนไป

เนื่องจากพลังงานศักย์คืองานจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่ง จึงมีคุณสมบัติเหมือนกับงานโดยทั่วไป นั่นคือพลังงานศักย์เป็นปริมาณ*สเกลาร์* มีค่าเป็นบวก ลบ หรือศูนย์ก็ได้ ในระบบ SI พลังงานศักย์มีหน่วยเป็นจูล (J)

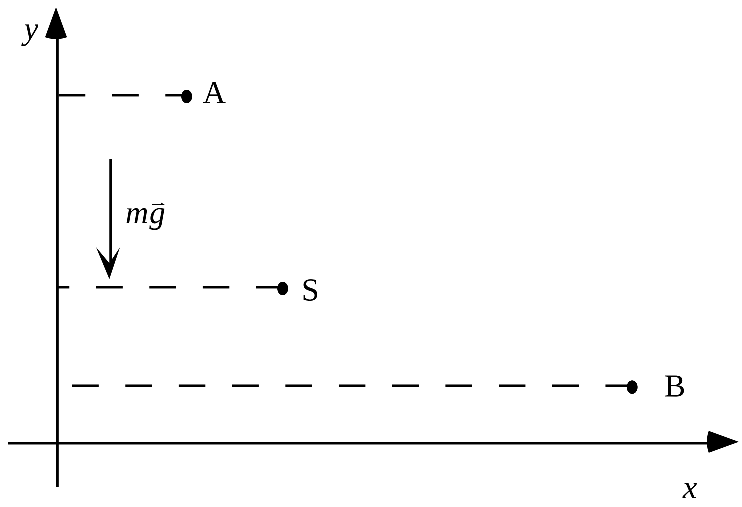
จากนิยามของพลังงานศักย์ พลังงานศักย์ที่จุดอ้างอิงคืองานที่แรงอนุรักษ์ทำในการเคลื่อนที่จาก จุด S ไปแล้วกลับมายังจุด S เดิมบนเส้นทางใด ๆ และดังนั้นจึงมีค่าเท่ากับงานที่ทำในการอยู่เฉย ๆ คือ เท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้น *ที่จุดอ้างอิง พลังงานศักย์มีค่าเท่ากับศูนย์*

เราอาจเลือกจุดใดที่สะดวกเป็นจุดอ้างอิงก็ได้ ค่าของพลังงานศักย์ย่อมเปลี่ยนไปตามจุดอ้างอิงที่เลือก อย่างไรก็ตาม *ผลต่าง*ระหว่างพลังงานศักย์ที่จุดสองจุดใด ๆ มีค่าไม่ขึ้นกับจุดอ้างอิงที่เลือก แต่มีค่าเท่ากับงานที่ทำระหว่างจุดทั้งสองนั้น

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ไปในทิศของแรง งานที่ทำโดยแรงนี้จะเป็นบวก ดังนั้นจากสมการข้างบน จะเห็นได้ว่าพลังงานศักย์จะมีค่าลดลง ในทางกลับกัน ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในทิศสวนกับทิศของแรง งานจะเป็นลบ และพลังงานศักย์ของอนุภาคมีค่าเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 7.1 พลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลก

ที่ผิวโลกอนุภาคมวล m ถูกแรงโน้มถ่วงคงตัว $m\bar{g}$ กระทำในทิศลงตามแนวดิ่ง ในรูป 7.1 เราเลือกให้จุด S เป็นจุดอ้างอิง จุด A อยู่เหนือจุด S แต่จุด B อยู่ต่ำกว่าจุด S



รูป 7.1

โดยนิยาม พลังงานศักย์ที่จุด A คือ

$$U_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{AS}} = mg(y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{S}}) = mgh_{\mathrm{A}}$$

แต่พลังงานศักย์ที่จุด B คือ

$$U_{\mathrm{B}} = W_{\mathrm{BS}} = mg(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{S}}) = mgh_{\mathrm{B}}$$

โดยที่ h_{A} และ h_{B} เป็นความสูงของอนุภาคที่จุด A และ B จากตำแหน่งอ้างอิง S ตามลำดับ ในที่นี้เราให้ h มีค่าเป็นบวกถ้าตำแหน่งของอนุภาคอยู่เหนือจุดอ้างอิง S และมีค่าเป็นลบถ้าจุดนั้นอยู่ต่ำกว่าจุดอ้างอิง S เพราะฉะนั้น โดยทั่วไปเราอาจเขียนได้ว่า

$$U = mgh$$

ตัวอย่าง 2.2 พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริง

ถ้าเราเลือกให้ตำแหน่งที่สปริงยาวตามธรรมชาติเป็นตำแหน่งอ้างอิง เราสามารถให้นิยามพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงซึ่งมีค่าคงตัวสปริงเท่ากับ k ที่ตำแหน่ง x จากตำแหน่งอ้างอิงนี้ได้จาก

$$U_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{S}} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_S^2$$

แทนค่า $x_A = x$ และ $x_S = 0$ เราจะได้ว่า $$U_x = \frac{1}{2}kx^2$$

8. กฎพลังงาน

ในหัวข้อที่แล้วเราได้เห็นว่าเราสามารถเขียนงานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ในรูปค่าลบของผลต่างพลังงานศักย์ได้ เราสามารถใช้ประโยชน์จากข้อสังเกตนี้โดยการแทนค่างานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ในกฎงาน-พลังงานจลน์

กฎงาน-พลังงานจลน์

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}} = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 = \Delta E_{\mathrm{k;A}\to\mathrm{B}}$$

ให้ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์ของอนุภาคที่เปลี่ยนไปกับงานสุทธิที่กระทำต่ออนุภาค แต่ว่างานสุทธินี้สามารถเขียนในรูปผลบวกของปริมาณสองปริมาณได้ว่า

$$W^{\text{สุทธิ}} = W^{\text{แรงอนุรักษ์}} + W^{\text{แรงอื่น}}$$

แต่ $$W^{\text{แรงอนุรักษ์}} = -\Delta U$$

ดังนั้น $$W^{\text{สุทธิ}} = -\Delta U + W^{\text{แรงอื่น}}$$

ในที่นี้พจน์แรกทางขวามือคืองานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ และ $W^{\text{แรงอื่น}}$ คืองานโดยแรงอื่นที่ไม่ได้รวมเขียนในรูปของพลังงานศักย์ ถ้ามีแรงอนุรักษ์หลายแรง ΔU จะเป็นพลังงานศักย์เนื่องจากงานโดยแรงอนุรักษ์ทั้งหมดที่เราเขียนให้อยู่ในรูปพลังงานศักย์

$$W^{\text{แรงอนุรักษ์}} = W_1^{\text{แรงอนุรักษ์}} + W_2^{\text{แรงอนุรักษ์}} + .. = \left(-\Delta U_1\right) + \left(-\Delta U_2\right) + .. = -\Delta U$$

โดยปกติเราจะเขียนงานโดยแรงอนุรักษ์*ทั้งหมด*ให้อยู่ในรูปพลังงานศักย์ที่เปลี่ยนไป $W^{\text{แรงอื่น}}$ ซึ่งเป็นงานโดยแรงอื่นก็จะเป็นงานโดยแรงไม่อนุรักษ์อื่นทั้งหมด (เช่น แรงเสียดทานต่าง ๆ)

ถ้าเราแทน $W^{\text{สุทธิ}} = -\Delta U + W^{\text{แรงอื่น}}$ ลงในกฎงาน-พลังงานจลน์ เราจะได้ว่า

$$W^{\text{สุทธิ}}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\Delta U_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + W^{\text{แรงอื่น}}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \Delta E_{\mathrm{k};\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

ดังนั้น

$$\Delta E_{\mathrm{k};\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + \Delta U_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \Delta\left(E_{\mathrm{k};\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + U_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\right) = W^{\text{แรงอื่น}}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

เราสามารถเขียนสมการข้างบนนี้ให้อยู่ในรูปง่าย ๆ ถ้าเราให้นิยาม*พลังงานทั้งหมด*ของอนุภาคซึ่งใช้สัญลักษณ์แทนด้วย E ดังนี้

นิยาม พลังงาน $E = E_{\mathrm{k}} + U$

โดยการใช้นิยามนี้เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ข้างบนเสียใหม่ในรูป*กฎพลังงาน*ว่า

$$\Delta E_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = W^{\text{แรงอื่น}}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

กฎนี้กล่าวว่า *พลังงานของอนุภาคที่เปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับงานที่กระทำโดยแรงอื่น ๆ ที่ไม่ได้รวมในพลังงานศักย์* (ถ้างานโดยแรงอนุรักษ์ทั้งหมดเขียนอยู่ในรูปผลต่างพลังงานศักย์แล้ว งานโดยแรงอื่นก็จะเป็นแค่งานโดยแรงไม่อนุรักษ์ เช่นแรงเสียดทานเท่านั้น)

โดยนิยาม พลังงาน E มีหน่วยเดียวกับงาน พลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ ในระบบ SI หน่วยของพลังงานคือจูล (J) พลังงานอาจมีค่าเป็นบวก ลบ หรือศูนย์ก็ได้ เพราะว่าพลังงานศักย์อาจมีขนาดและเครื่องหมายเป็นอะไรก็ได้

กฎพลังงานเป็นกฎที่ให้ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของอนุภาค (พลังงานจลน์) กับอันตรกิริยาของอนุภาคกับวัตถุอื่น (พลังงานศักย์ และงานโดยแรงอื่น) กฎนี้ให้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วและตำแหน่งของอนุภาคโดยตรงโดยที่ไม่มีเวลาเกี่ยวข้อง เราใช้กฎนี้เมื่อเราเจอปัญหาเกี่ยวกับตำแหน่งและอัตราเร็วที่ไม่สนใจเรื่องเวลา เราใช้กฎนี้กับปัญหาที่มีตำแหน่งสองตำแหน่ง ตำแหน่งหนึ่งเรารู้ว่าอยู่ที่ไหนและอนุภาคมีอัตราเร็วเท่าไร อีกตำแหน่งหนึ่งเป็นตำแหน่งที่เราอยากรู้ว่าอยู่ที่ไหนถ้าเรารู้ว่าที่นั่นอนุภาคมีอัตราเร็วเท่าไร หรืออาจเป็นปัญหาที่เรารู้ตำแหน่งแต่ต้องการรู้ว่าที่ตำแหน่งนั้นอนุภาคมีอัตราเร็วเท่าไร

9. กฎการคงตัวของพลังงาน

ในกรณีพิเศษที่แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคเป็นแรงอนุรักษ์ (เช่น ไม่มีแรงเสียดทานใด ๆ ทำงานต่ออนุภาค) งานที่ทำโดยแรงทั้งหมดเขียนในรูปพลังงานศักย์ได้ ดังนั้นงานโดยแรงอื่นมีค่าเป็นศูนย์ ในกรณีนี้กฎพลังงานบอกเราว่า $\Delta E = 0$ นั่นคือพลังงานของอนุภาคมีค่าคงตัว ไม่เปลี่ยนแปลง

ถ้า $W^{\text{แรงอื่น}} = 0$ จะได้ว่า $$E = E_{\mathrm{k}} + U = \text{ค่าคงตัว}$$

ในกรณีนี้เราพูดว่าพลังงานของอนุภาคมีค่าคงตัว แต่พลังงานจลน์และพลังงานศักย์แต่ละปริมาณอาจมีค่าเปลี่ยนไปได้โดยที่ผลบวกทั้งหมดยังคงมีค่าเท่าเดิมได้ นั่นคือพลังงานจลน์อาจเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานศักย์ หรือพลังงานศักย์อาจเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานจลน์ก็ได้โดยที่ทำให้พลังงานทั้งหมดมีค่าคงตัว

ตัวอย่าง 9.1 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่อนุภาคถูกแรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลกกระทำ สมมุติว่าอนุภาคมวล m ถูกยิงขึ้นจากจุด A บนพื้นด้วยอัตราเร็ว u ทำมุม θ กับแนวระดับ เราต้องการหาอัตราเร็ว v ของอนุภาคที่ความสูง h ใด ๆ จากพื้น

แรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลกเป็นแรงอนุรักษ์ อันตรกิริยาระหว่างอนุภาคกับแรงโน้มถ่วงของโลกสามารถบรรยายแทนด้วยพลังงานศักย์โน้มถ่วง $U = mgh$ และถ้าเราสมมุติว่าแรงต้านจากอากาศมีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่มีแรงต้าน งานเนื่องจากแรงอื่นจะเป็นศูนย์ กฎพลังงานจึงบอกว่า

$$E = E_{\mathrm{k}} + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{ค่าคงตัว}$$

ตลอดการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระหว่างที่ลอยอยู่กลางอากาศ

ขณะที่อนุภาคเคลื่อนที่สูงขึ้นไป h มีค่ามากขึ้น ดังนั้นพลังงานศักย์ $U = mgh$ มีค่ามากขึ้นตามไปด้วย พลังงานจลน์และอัตราเร็วของอนุภาคจึงต้องมีขนาดลดลงเพื่อที่พลังงานทั้งหมด E มีค่าคงตัว ในทางกลับกันถ้าอนุภาคตกลงมา อัตราเร็วของอนุภาคจะมากขึ้น

พลังงานทั้งหมดมีค่าเท่ากับที่จุดตั้งต้น A ดังนั้น

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mu^2 + 0$$

ทำให้เราได้ว่า อัตราเร็วของอนุภาคที่ความสูง h มีค่า

$$v = \sqrt{u^2 - 2gh}$$

ขณะที่อนุภาคตกลงมาจะกระทบพื้น ความสูง h มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นอัตราเร็วของอนุภาคตอนที่จะกระทบพื้นพอดีมีค่าเท่ากับอัตราเร็ว u ตอนตั้งต้น

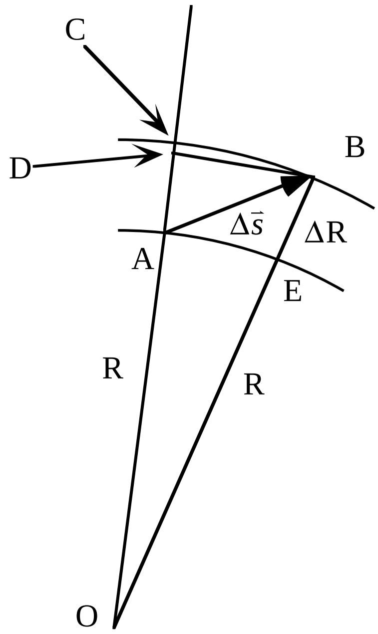
ถ้าแรงต้านจากอากาศมีค่ามากจนเราไม่คำนึงถึงไม่ได้ จะมีงานเนื่องจากแรงอื่นเป็นงานจากแรงเสียดทานของอากาศ แรงนี้มีทิศสวนทางกับการกระจัด และดังนั้นงานที่ทำโดยแรงนี้ต่ออนุภาคจึงมีค่าเป็นลบ จาก $\Delta E_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}^{\text{แรงอื่น}}$ จะเห็นได้ว่าพลังงานทั้งหมดมีค่าน้อยลง แต่เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่กลับมายังตำแหน่งที่สูงเท่าเดิม พลังงานศักย์โน้มถ่วงมีค่าเท่าเดิม ดังนั้นพลังงานจลน์ของอนุภาคต้องลดลง

10. แรงศูนย์กลางและพลังงานศักย์

แรงพื้นฐานในธรรมชาติ เช่น แรงโน้มถ่วงที่อนุภาคซึ่งมีมวลอนุภาคหนึ่งทำต่ออนุภาคที่มีมวลอีกอนุภาคหนึ่ง หรือแรงไฟฟ้าที่อนุภาคซึ่งมีประจุไฟฟ้าอนุภาคหนึ่งกระทำต่ออนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าอีกอนุภาคหนึ่ง เป็นแรงที่แนวแรงมีทิศในแนวเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างอนุภาคและมีขนาดขึ้นกับระยะห่างระหว่างอนุภาคเท่านั้น เราเรียกแรงชนิดนี้ว่า*แรงศูนย์กลาง* เพราะเป็นแรงที่แนวแรงผ่านจุด ๆ หนึ่งเสมอ เราจะแสดงให้ดูว่าแรงชนิดนี้เป็นแรงอนุรักษ์และหาพลังงานศักย์ของอนุภาคเนื่องจากแรงนี้

ในการแสดงว่าแรงนี้เป็นแรงอนุรักษ์เราต้องแสดงให้เห็นว่า งานเนื่องจากแรงนี้ไม่ขึ้นกับเส้นทางแต่ขึ้นกับตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น เนื่องจากโดยทั่วไปแรงนี้ไม่ใช่แรงคงที่ ดังนั้นเราจำเป็นต้องแบ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ หางานในแต่ละช่วงสั้น ๆ นี้ แล้วบวกงานทั้งหมดเป็นงานตลอดเส้นทางที่ต้องการ ดังนั้นในขั้นแรกเราต้องหางานที่ทำโดยแรงนี้ตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ ก่อน

11. งานที่กระทำตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ



รูป 11.1

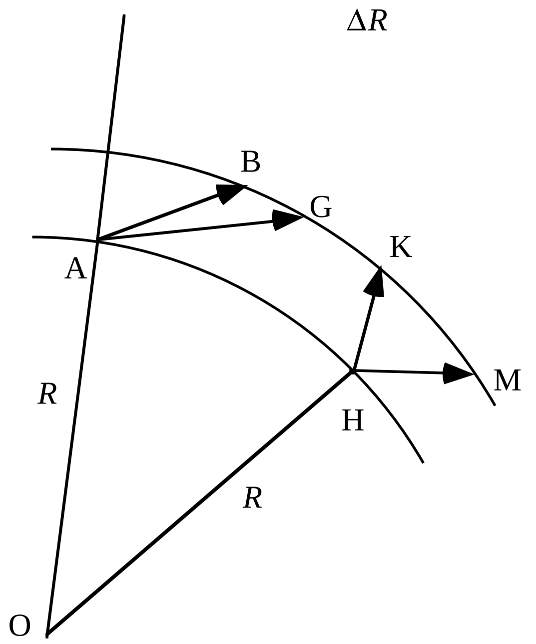
พิจารณาอนุภาคหนึ่งซึ่งถูกตรึงอยู่ที่ตำแหน่ง O ตำแหน่งหนึ่ง อนุภาคนี้ออกแรง $\vec{F}$ กระทำต่ออีกอนุภาคหนึ่งซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง A ซึ่งอยู่ห่างจาก O เป็นระยะทาง R ให้แรงนี้เป็นแรงศูนย์กลาง ดังนั้นแนวที่แรงกระทำจะอยู่ในแนวรัศมี โดยที่ถ้าเป็นแรงผลัก แรงจะชี้ออกจาก O ไปตามแนวรัศมี แต่ถ้าเป็นแรงดูด แรงจะชี้เข้าศูนย์กลางตามแนวรัศมี นอกจากนั้น ขนาดแรง F มีค่าขึ้นกับระยะห่าง R จากจุด O ไปยัง A เท่านั้น สมมุติว่าอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B ใกล้ ๆ เป็นการกระจัด $\Delta\vec{s}$ สั้น ๆ โดยที่จุด B อยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง $R+\Delta R$ ให้ W เป็นงานที่กระทำโดยแรง $\vec{F}$ เมื่ออนุภาคมีการกระจัดนี้

จากนิยามของงาน เราได้ว่า $W = F\Delta s_F$

โดยที่ F คือขนาดของแรง และ Δs_F คือองค์ประกอบของการกระจัดสั้น ๆ นี้ในทิศของแรง ในรูป 4.1 Δs_F คือระยะ AD เนื่องจาก $\Delta\vec{s}$ เป็นการกระจัดสั้น ๆ ระยะ AD มีค่าใกล้เคียงกับระยะ AC ซึ่งยาวเท่ากับ ΔR ดังนั้นเราประมาณได้ว่า

$$W = F\Delta R$$

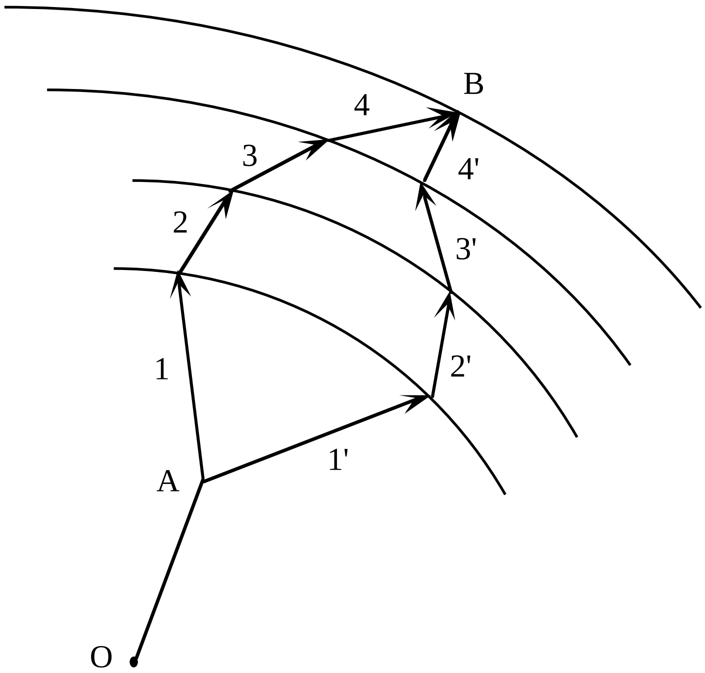
ถ้าแรง $\bar{F}$ เป็นแรงผลักดังรูป (หรือมีค่าเท่ากับ $-F\Delta R$ ถ้าแรง $\bar{F}$ เป็นแรงดูด)



รูป 11.2

เนื่องจากงานตามการกระจัดสั้น ๆ มีค่าขึ้นอยู่กับองค์ประกอบในแนวรัศมีของการกระจัดเท่านั้น งานตามเส้นทางการกระจัด AB และ AG ในรูป 11.2 จึงมีค่าเท่ากัน นอกจากนั้นเนื่องจากขนาดของแรงขึ้นกับระยะห่างระหว่างอนุภาคเท่านั้น ขนาดของแรงที่จุด A และจุด H ซึ่งอยู่ห่างจาก O เท่ากันจึงมีค่าเท่ากันด้วย ทำให้งานเนื่องจากแรงนี้ตามเส้นทาง HK และ HM มีค่าเท่ากับงานตามเส้นทางการกระจัด AB และ AG ด้วย (เพราะว่าองค์ประกอบตามแนวรัศมีของการกระจัดเหล่านี้มีค่าเท่ากัน)

ต่อไปเราพิจารณางานที่ทำต่ออนุภาคตามเส้นทางสองเส้นทางที่ต่างกันจากจุด A ไปยังจุด B ดังในรูป 4.3 เราแบ่งแต่ละเส้นทางออกเป็นการกระจัดสั้น ๆ ติดต่อกันดังรูป เส้นทางที่หนึ่งไปตามการกระจัด 1, 2, 3, 4 ส่วนเส้นทางที่สองไปตามการกระจัด 1', 2', 3', 4' โดยที่การกระจัดที่มีเลขตรงกัน เช่น 1 และ 1' เริ่มจากจุดที่อยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง R เท่ากันและไปจบลงที่จุดที่อยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง $R+\Delta R$ เท่ากัน ดังนั้นงานที่ทำตามเส้นทาง 1 และ 1' มีค่าเท่ากัน งานที่ทำตามเส้นทาง 2 และ 2' มีค่าเท่ากัน และช่วงอื่นก็เช่นกัน เพราะฉะนั้นงานทั้งหมดที่ทำบนเส้นทางที่หนึ่งมีค่าเท่ากับงานทั้งหมดที่ทำบนเส้นทางที่สอง นั่นคือ *งานที่ทำโดยแรงศูนย์กลางมีค่าไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่*



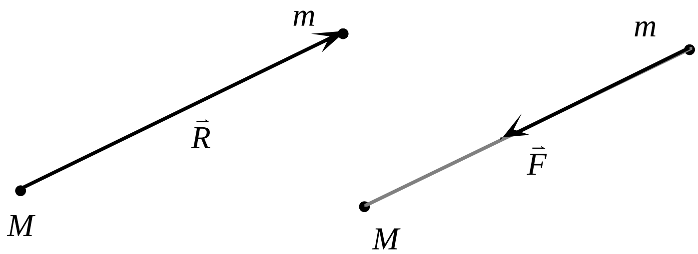
รูป 11.3

งานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วงระหว่างอนุภาคมีมวลสองอนุภาค

แรงโน้มถ่วงที่อนุภาคมวล M ดูดอนุภาคมวล m ซึ่งอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง R ดังในรูป 4.4 มีค่า

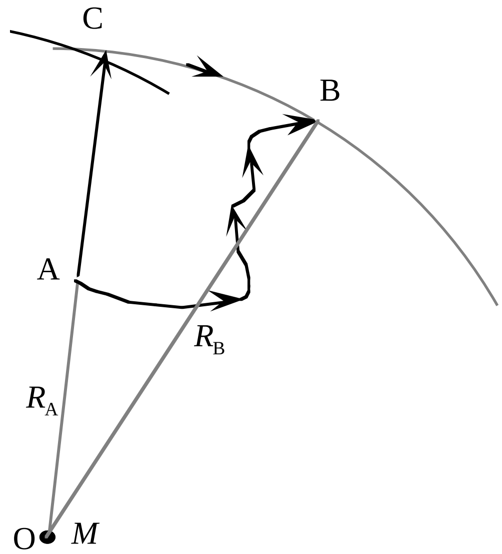
$$\vec{F} = \frac{GMm}{R^2}(-\hat{R})$$

โดยที่ $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งชี้จากอนุภาคมวล M ไปยังอนุภาคมวล m และ $\hat{R}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศนี้



รูป 11.4

สมมุติว่าอนุภาคมวล m เคลื่อนที่จาก A ไป B ตามเส้นทางคดไปมาดังในรูป 11.5 เราต้องการหางานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วงตามเส้นทางนี้ เนื่องจากงานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วงไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ เราสามารถคำนวณงานนี้ตามเส้นทางใดก็ได้ที่เริ่มต้นจากจุด A และจบที่จุด B เหมือนกัน ให้ O เป็นตำแหน่งของอนุภาคมวล M และ C เป็นจุดในแนวรัศมีเดิม OA ซึ่งอยู่ห่างจาก O เท่ากับรัศมี OB (ให้ OA = R_A และ OB = R_B) เราเลือกเส้นทางในการคำนวณตามเส้นจาก A ตรงไป C แล้วจาก C ไป B ตามส่วนโค้งของวงกลมดังรูป



รูปที่ 11.5

งานตามส่วนโค้ง CB มีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่าแรงมีทิศในแนวรัศมีซึ่งตั้งฉากกับการกระจัดตามส่วนโค้งตลอดเวลา ดังนั้นงานจาก A ไป B มีค่าเท่ากับงานจาก A ไป C ตามแนวรัศมี

เพื่อที่จะหางานจาก A ไป C ตามแนวรัศมี เราแบ่งการกระจัดตามแนวนี้ออกเป็นช่วงสั้น ๆ จำนวนมหาศาล หางานในแต่ละช่วงแล้วนำมาบวกกัน

พิจารณางานในช่วงสั้น ๆ จากรัศมี R_1 ไปรัศมี R_2 การกระจัดมีขนาดเท่ากับ $R_2 - R_1$ เนื่องจากแรงมีขนาดไม่คงตัวแต่ขึ้นกับระยะห่างจากจุด O เราต้องใช้แรงเฉลี่ย เนื่องจากขนาดของแรงแปรผกผันกับ R^2 ถ้าเราใช้ R_1 แทนระยะห่าง เราจะใช้แรงตัวแทนที่มีขนาดโตเกินไป แต่ถ้าเราใช้ R_2 แทนระยะห่าง เราจะใช้แรงตัวแทนที่มีขนาดเล็กเกินไป ดังนั้นเราเฉลี่ยโดยให้ตัวคูณหนึ่งเป็น R_1 และอีกตัวคูณหนึ่งเป็น R_2 นั่นคือ เราให้แรงเฉลี่ยในช่วงนี้มีค่าเท่ากับ

$$F_{1\to 2} = \frac{GMm}{R_1 R_2}$$

เนื่องจากแรงมีทิศเข้า แต่การกระจัดมีทิศออก ดังนั้น งานจึงมีค่าเป็นลบ และมีค่าประมาณ

$$W_{1\to 2} \approx -\frac{GMm}{R_1 R_2}(R_2 - R_1) = GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

ในทำนองเดียวกัน งานจากตำแหน่ง 2 ไป 3 ....n-1 ไป n มีค่าประมาณ

$$W_{2\to 3} \approx GMm\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right), \ldots\ldots\ldots W_{n-1\to n} \approx GMm\left(\frac{1}{R_\mathrm{n}} - \frac{1}{R_\mathrm{n\text{-}1}}\right)$$

เมื่อบวกงานทั้งหมดเข้าด้วยกันจาก 1 ไป n จะได้ว่า

$$W_{1\to n} \approx GMm\left(\frac{1}{R_\mathrm{n}} - \frac{1}{R_1}\right)$$

ให้ตำแหน่ง 1 เป็นตำแหน่ง A และตำแหน่งสุดท้าย n เป็นตำแหน่ง B และพิจารณาเมื่อการกระจัดแต่ละช่วงมีขนาดเล็กมากจนเข้าหาศูนย์ เราจะได้ค่าที่ถูกต้อง คือ

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = GMm\left(\frac{1}{R_\mathrm{B}} - \frac{1}{R_\mathrm{A}}\right) = \left(-\frac{GMm}{R_\mathrm{A}}\right) - \left(-\frac{GMm}{R_\mathrm{B}}\right)$$

ถ้าเราเลือกให้จุดอ้างอิงของพลังงานศักย์โน้มถ่วงเป็นจุดที่อนันต์ เราจะได้ว่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงที่จุด A ใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$U_\mathrm{A}^{\text{โน้มถ่วง}} = W_{\mathrm{A}\to\infty}^{\text{โน้มถ่วง}} = -\frac{GMm}{R_\mathrm{A}}$$

ในทำนองเดียวกัน งานที่ทำโดยแรงคูลอมบ์ $\vec{F} = k_E \frac{Qq}{R^2}\hat{R}$ ระหว่างอนุภาคมีประจุไฟฟ้าสองประจุ Q และ q จากตำแหน่งซึ่งเดิมห่างกัน R_A ไปอยู่ในตำแหน่งที่ห่างกัน R_B มีค่า

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = k_E \frac{Qq}{R_\mathrm{A}} - k_E \frac{Qq}{R_\mathrm{B}}$$

ถ้าเราเลือกให้จุดอ้างอิงของพลังงานศักย์อยู่ที่อนันต์ เราจะได้ว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่จุด A ใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$U_\mathrm{A}^{\text{ไฟฟ้า}} = W_{\mathrm{A}\to\infty}^{\text{ไฟฟ้า}} = k_E \frac{Qq}{R_\mathrm{A}}$$

แบบฝึกหัด

1. ดาวเทียมมวล m ดวงหนึ่งโคจรเป็นวงกลมรอบโลกมวล M รัศมี R_E ที่ความสูง H จากผิวโลก จงหาพลังงานทั้งหมดของดาวเทียมนี้ ถ้าให้พลังงานศักย์โน้มถ่วงของดาวเทียมเป็นศูนย์ที่ระยะอนันต์จากโลก ให้ตอบในรูปตัวแปรที่ให้มาและค่าความเร่ง g เนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่ผิวโลก

2. ถ้าต้องการยิงกากนิวเคลียร์มวล m ให้หลุดพ้นออกไปจากโลก จะต้องยิงออกไปด้วยอัตราเร็วอย่างน้อยที่สุดเท่าไร ให้ตอบในรูปตัวแปรที่ให้มาและค่าความเร่ง g เนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่ผิวโลก

3. ในแบบจำลองอะตอมไฮโดรเจนของ Bohr อะตอมประกอบด้วยอนุภาคโปรตอนเป็นนิวเคลียสอยู่นิ่งและมีอิเล็กตรอนโคจรเป็นวงกลมรอบนิวเคลียส โปรตอนมีประจุไฟฟ้า $+e$ ส่วนอิเล็กตรอนมีประจุ $-e$ อนุภาคทั้งสองออกแรงไฟฟ้าดูดกัน

   จงแสดงให้เห็นว่าพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของขนาดพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบ (ให้สมมุติว่ารัศมีการโคจรเท่ากับ r และอิเล็กตรอนมีมวล m)

   ถ้าอิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะจากที่โคจรที่รัศมี r_1 มาอยู่ในวงโคจรซึ่งมีรัศมี r_2 ระบบจะมีพลังงานเปลี่ยนไปเท่าไร ให้หาพลังงานของระบบที่เปลี่ยนไปนี้ (ในการเปลี่ยนสถานะนี้จะมีการปล่อยอนุภาคโฟตอน (แสง) ออกมา หรือมีการดูดโฟตอนเข้าไป)