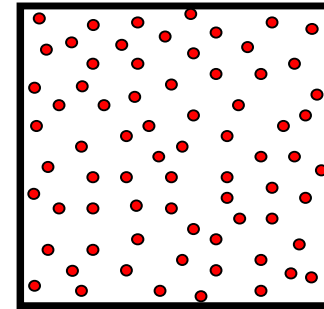


# การแจกแจงความเร็วของโมเลกุลก๊าซ

เราทราบกันแล้วว่า  $v_{rms}$  สามารถคำนวณได้จากอุณหภูมิของก๊าซ ความเร็วนี้เป็นค่าเฉลี่ยชนิดหนึ่ง จึงไม่ได้หมายความว่าทุกๆ โมเลกุลของก๊าซมีความเร็วเท่ากับ  $v_{rms}$  ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาก๊าซ  $N$  โมเลกุลในกล่องปิด



เราอาจจะเขียนตารางแจกแจงความเร็วของโมเลกุลแต่ละตัวได้ดังนี้

โมเลกุลที่	1	2	3	...	N
ความเร็ว	$v_1$	$v_2$	$v_3$	...	$v_N$

โมเมนต์ที่	1	2	3	...	N
ความเร็ว	$v_1$	$v_2$	$v_3$	...	$v_N$

จากตารางแจกแจงความเร็วนี้ เราสามารถคำนวณหา  $v_{rms}$  ได้เป็น

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \{ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_N^2 \}}$$

ค่า  $v_{rms}$  โดยทั่วไปจะมีค่าไม่เท่ากับค่าอัตราเร็วเฉลี่ย (Average speed) หรือ  $v_{avg}$  โดยที่

$$v_{avg} = \frac{1}{N} \{ v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \}$$

**ตัวอย่าง** พิจารณาก๊าซในภาชนะปิดที่มีการแจกแจงความเร็วของแต่ละโมเลกุลดังตารางข้างล่าง

ความเร็ว (m/s)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000
จำนวน โมเลกุล	20	80	250	380	320	240	120	70	15	5

จำนวนโมเลกุลทั้งหมดคือ

$$N = 20 + 80 + 250 + 380 + 320 + 240 + 120 + 70 + 15 + 5 = 1,500$$

จำนวนโมเลกุลที่มีอัตราเร็วเท่ากับ 300 m/s มีทั้งหมดเท่ากับ  $N_{300} = 250$

จะได้ว่าความน่าจะเป็นที่จะเจอ โมเลกุลที่มีความเร็วเท่ากับ 300 m/s มีค่าเท่ากับ

$$P_{v=300} = \frac{N_{v=300}}{N} = \frac{250}{1,500} = \frac{1}{6} = 0.166$$

ความเร็ว (m/s)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000
จำนวน โมเลกุล	20	80	250	380	320	240	120	70	15	5
$P_v$	0.013	0.053	0.166	0.253	0.213	0.160	0.080	0.046	0.010	0.003

อัตราเร็วเฉลี่ยของโมเลกุลก๊าซสามารถคำนวณได้จาก

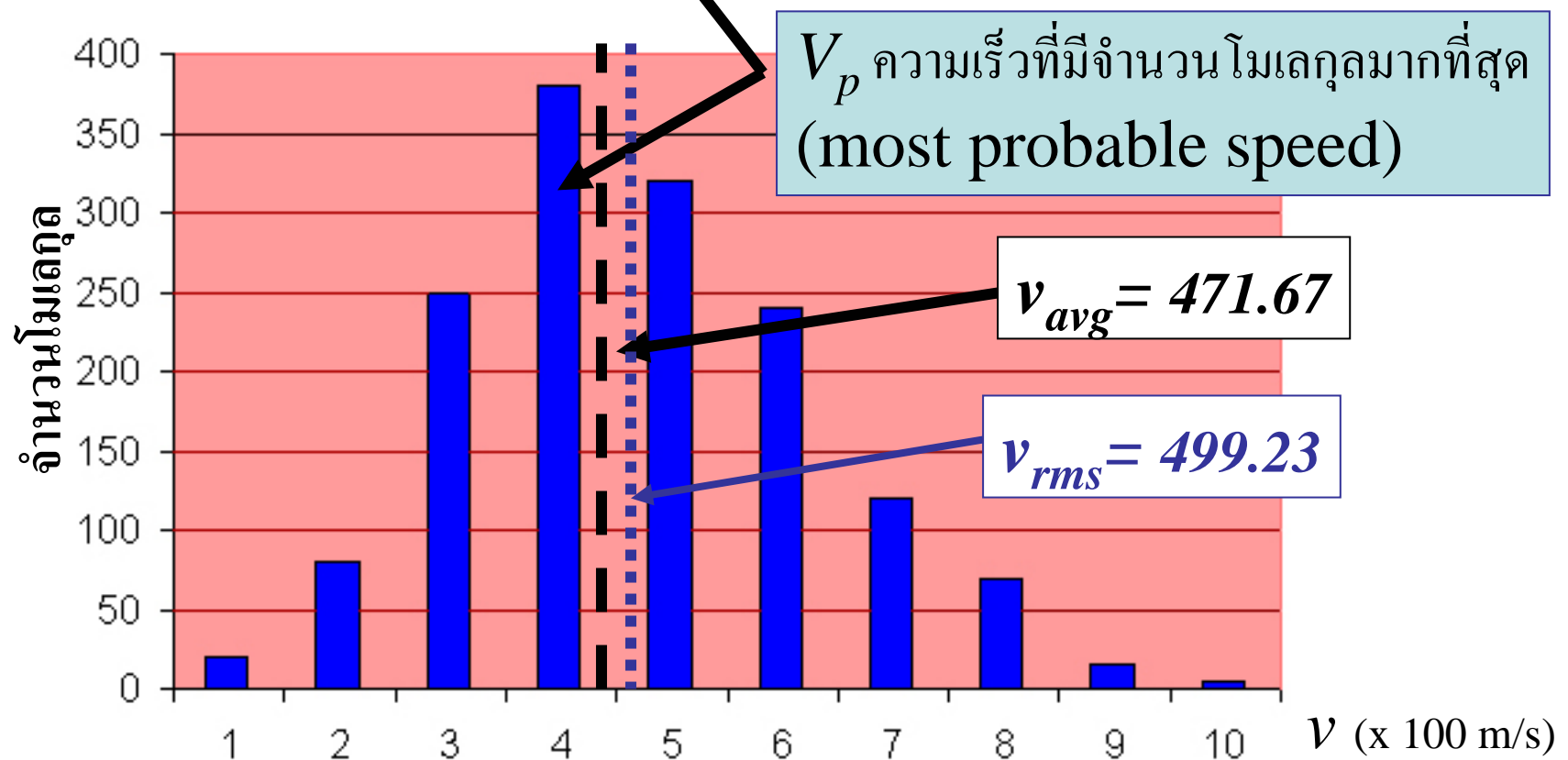
$$\begin{aligned}
 v_{avg} &= \frac{1}{N} \sum_{v=100}^{1,000} n_v v = \sum_{v=100}^{1,000} P_v v \\
 &= \left( \frac{20}{1,500} \times 100 \right) + \left( \frac{80}{1,500} \times 200 \right) + \dots + \left( \frac{5}{1,500} \times 1,000 \right) \\
 &= \frac{707,500}{1,500} = 471.67 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

ความเร็ว (m/s)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000
จำนวน โมเลกุล	20	80	250	380	320	240	120	70	15	5
$P_v$	0.013	0.053	0.166	0.253	0.213	0.160	0.080	0.046	0.010	0.003

$v_{rms}$  ของโมเลกุลก๊าซสามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned}
 v_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{v=100}^{1,000} n_v v^2} = \sqrt{\sum_{v=100}^{1,000} P_v v^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{20}{1,500} \times 100^2\right) + \left(\frac{80}{1,500} \times 200^2\right) + \dots + \left(\frac{5}{1,500} \times 1,000^2\right)} \\
 &= \sqrt{249233.3} = 499.23 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

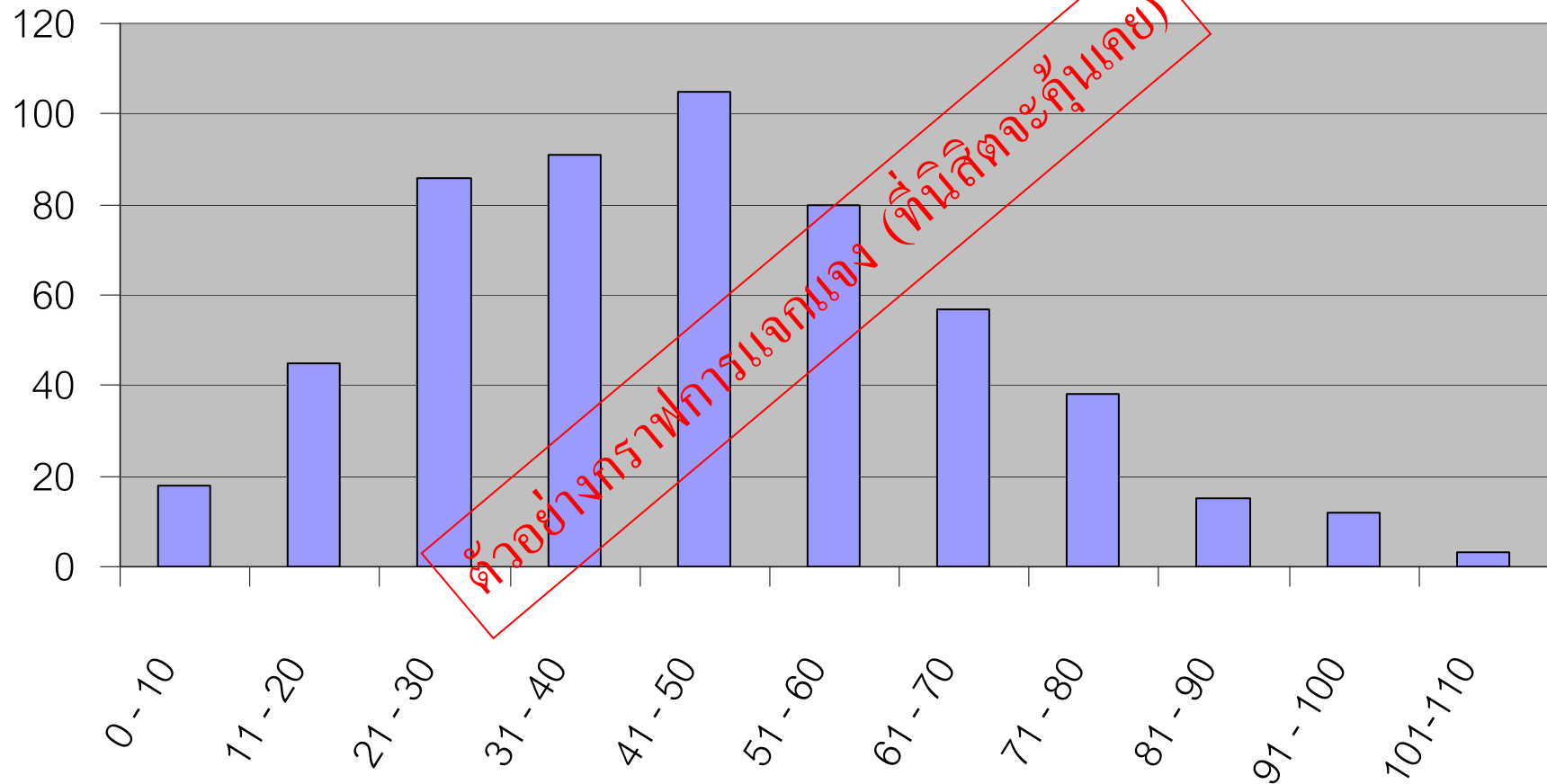
ความเร็ว (m/s)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000
จำนวน โมเลกุล	20	80	250	380	320	240	120	70	15	5
$P_v$	0.013	0.053	0.166	0.253	0.213	0.160	0.080	0.046	0.010	0.003



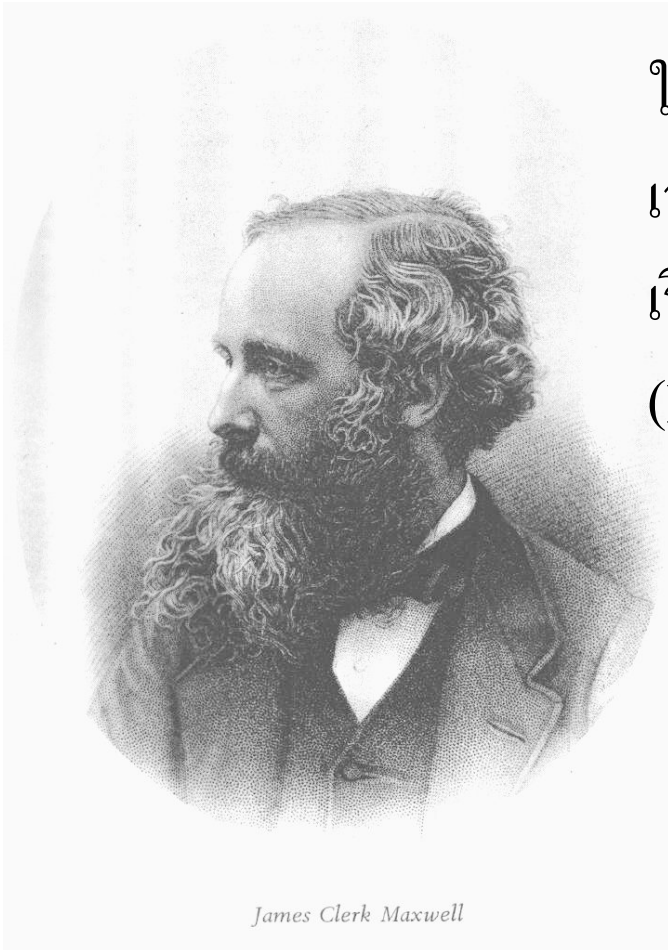
# คะแนนสอบ Midterm วิชา 2304103 GEN PHYS1 (วิทยาศาสตร์) 2547

Median = 44.00    Mean = 45.16    # of Students = 550

Max = 105.00    Min = 3.00    SD = 21.71



# การแจกแจงอัตราเร็วของโมเลกุลก๊าซ



ในปี ค.ศ. 1852 นักฟิสิกส์ชาวสก็อต เจมส์ คราก แมกซ์ เวลล์ เสนอการแจกแจงอัตราเร็วของก๊าซในอุดมคติ ซึ่งเรียกกันว่า การแจกแจงอัตราเร็วแบบแมกซ์เวลล์ หรือ (Maxwell speed distribution)

แมกซ์เวลล์แสดงให้เห็นว่า ความน่าจะเป็นที่จะพบโมเลกุลที่มีอัตราเร็ว  $V$  นั้นขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของก๊าซ



# Maxwell speed distribution

โดยที่ Probability distribution function หรือความน่าจะเป็นที่จะพบโมเลกุลที่มีอัตราเร็ว  $v$  สามารถเขียนได้เป็น

$$P(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left\{ -\frac{Mv^2}{2RT} \right\}$$

โดยที่

- $M$  คือ มวลต่อหนึ่งโมลของก๊าซ
- $R$  คือค่าคงที่ของก๊าซ (Gas constant)
- $T$  คืออุณหภูมิของก๊าซ

Note:  $P(v)$  หรือ Probability distribution function มีหน่วยเป็น (ความเร็ว)<sup>-1</sup> หรือ  $\text{s/m}$

หรือ เขียนในรูปที่อยู่ในหนังสือฟิสิกส์ 1

$$P(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\}$$

โดยที่

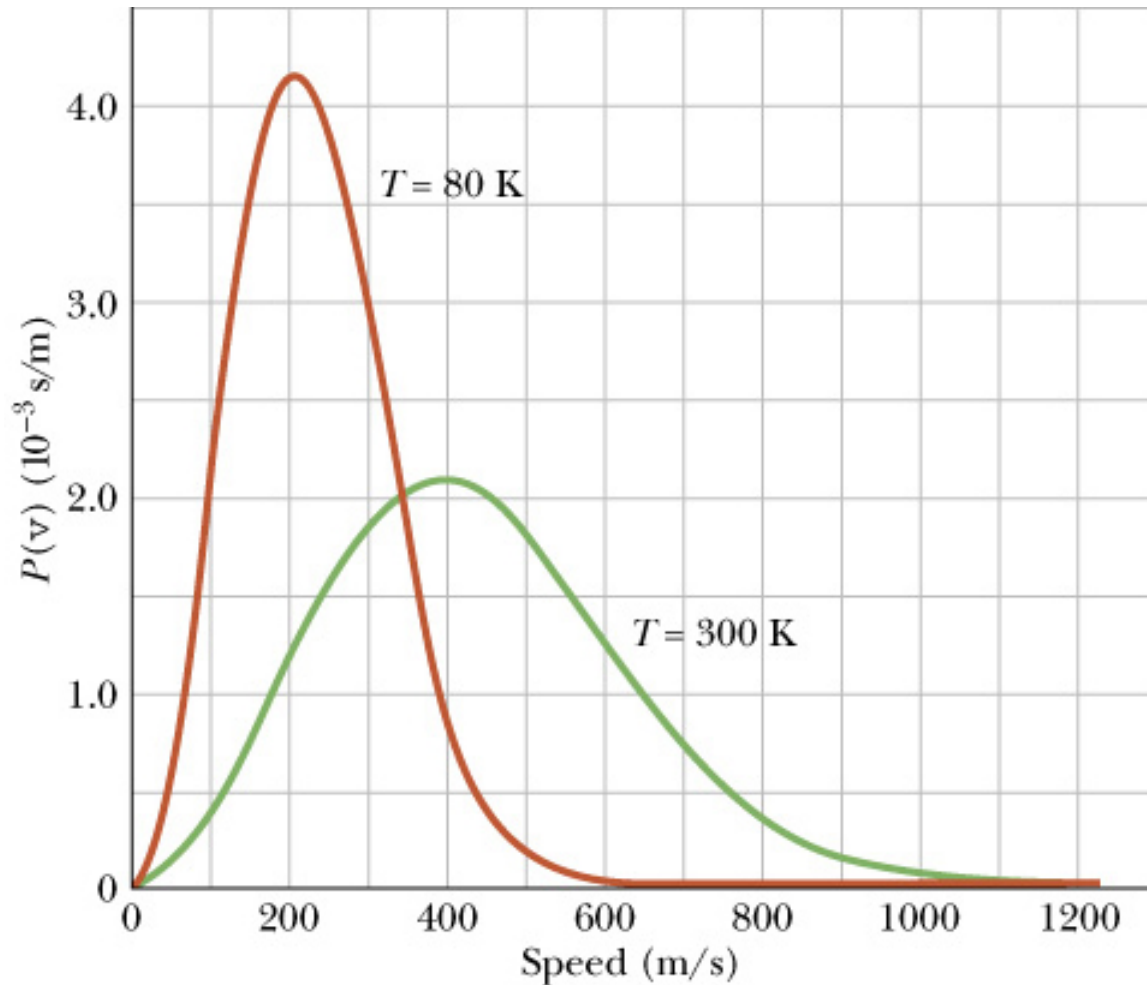
$m$  คือ มวลของโมเลกุลก๊าซ

$k$  คือค่าคงที่  $k = 1.38 \times 10^{-23}$

$T$  คืออุณหภูมิของก๊าซ

Note นิเสธไม่จำเป็นต้องท่องจำฟังก์ชัน  $P(v)$  ทั้งหมด แต่ควรจะทราบว่า  $P(v)$  ขึ้นอยู่กับ  $v^2$  คูณกับ  $\exp(-v^2$  คูณค่าคงที่)

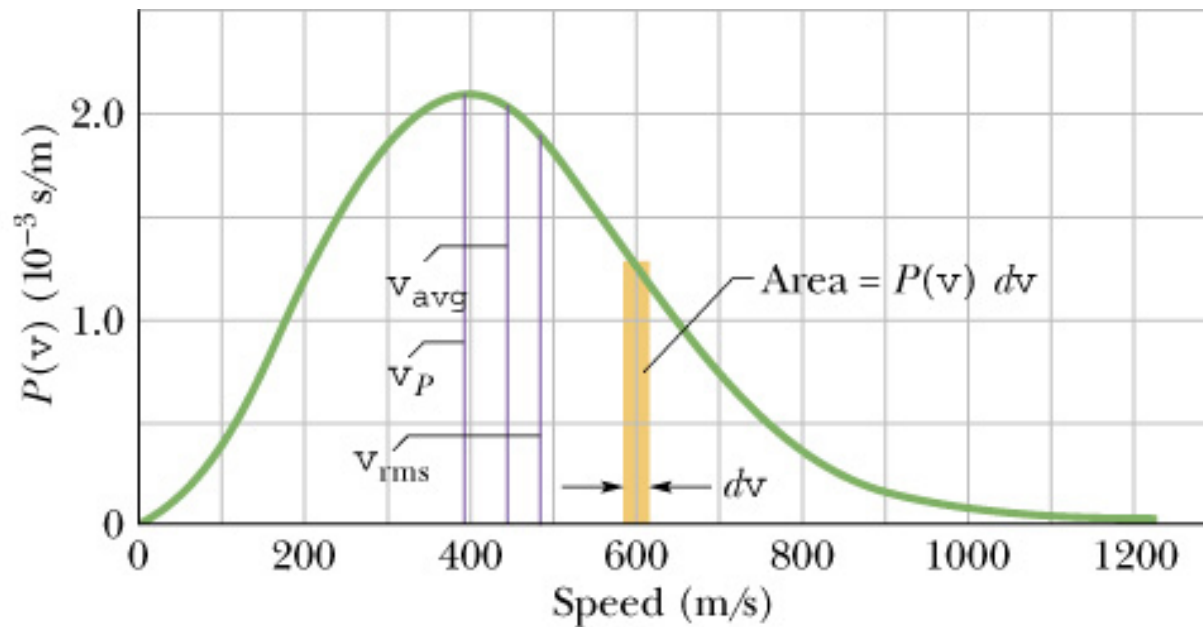
# กราฟการแจกแจงอัตราเร็วก๊าซแบบแมกซ์เวลล์



(b)

กราฟแสดงการแจกแจง  
อัตราเร็วของก๊าซ เปรียบเทียบ  
ระหว่างก๊าซที่อุณหภูมิ 80K กับ  
ก๊าซที่อุณหภูมิ 300K

สำหรับความเร็ว  $v$  ใดๆ ปริมาณ  $P(v)dv$  คือความน่าจะเป็นที่จะเจอโมเลกุลที่มีความเร็วอยู่ในช่วง  $v$  ถึง  $v+dv$



**Note**  $P(v)dv$  เป็น  
ความน่าจะเป็น  
จึงไม่มีหน่วย

จากรูป  $P(v)dv$  เป็นพื้นที่ของแท่งสี่น้ำตาตล ซึ่งมีความสูง  $P(v)$  และกว้าง  $dv$  พื้นที่ใต้กราฟจะแสดงสัดส่วนของ โมเลกุลที่มีความเร็วอยู่ระหว่าง 0 ถึง  $\infty$  เนื่องจากทุกๆ โมเลกุลของก๊าซจะมีความเร็วอยู่ในช่วงนี้เราจึงได้ว่า พื้นที่ใต้กราฟมีค่าเท่ากับ 1

## ตัวอย่าง

สำหรับก๊าซฮีเลียม จงหาเปอร์เซ็นต์ของโมเลกุลที่มีอัตราเร็วในช่วง 400 เมตรต่อวินาที ถึง 401 เมตรต่อวินาที ที่อุณหภูมิ 27 องศาเซลเซียส

### วิธีทำ

อัตราส่วนของโมเลกุลที่มีความเร็วอยู่ในช่วง  $v$  ถึง  $v+dv$  คือ  $P(v)dv$   
แทนค่า  $T = 300 \text{ K}$ ,  $m = 4 \times 1.66 \times 10^{-27} \text{ Kg}$ ,  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$

$$v = 400 \text{ m/s}, \quad dv = 1 \text{ m/s}$$

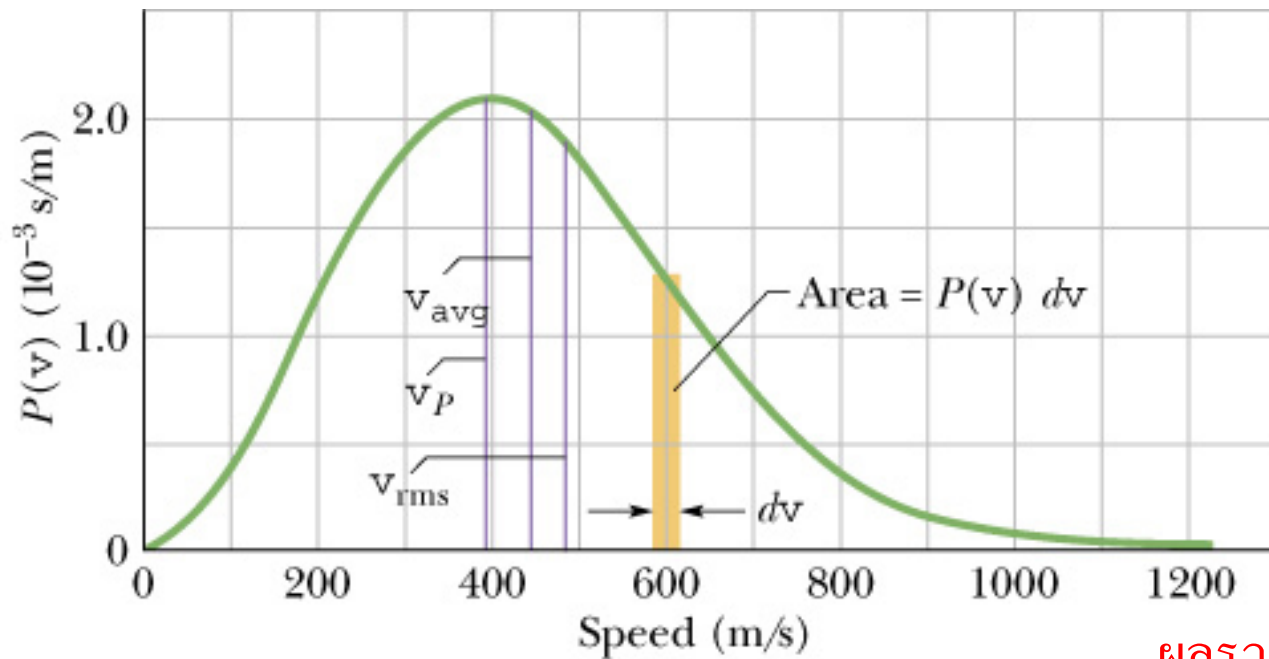
$$P(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\} dv$$
$$= 2.28 \times 10^{-4}$$

$$\frac{dN_v}{N} = P(v)dv$$

ในหนังสือ  
ฟิสิกส์หนึ่ง

คิดเป็นเปอร์เซ็นต์คือ  $2.28 \times 10^{-4} \times 100 = 0.0228 \%$

ตอบ



นั่นคือ

$$\int_0^{\infty} P(v) dv = 1$$

ผลรวมของความน่าจะเป็นเท่ากับ 1

หน้าที่ของเราคือทดสอบว่า Maxwell distribution สอดคล้องกับคุณสมบัตินี้ โดยการอินทิเกรต

$$\int_0^{\infty} P(v) dv = \int_0^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\} dv = 1$$

แต่ ... อินทิเกรตอย่างไร?

เปิดตาราง

Table B.6

Gauss's Probability Integral and Other Definite Integrals

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{Gauss's probability integral})$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

⋮

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$

จากตารางเราจะพบว่า

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P(v) dv &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^2 \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\} dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\left( \frac{mv^2}{2kT} \right)^3}} = 1 \end{aligned}$$



# อัตราเร็วเฉลี่ย $v_{avg}$

อัตราเร็วเฉลี่ยของก๊าซสามารถหาได้จาก

$$v_{avg} = \int_0^{\infty} v P(v) dv$$

แทนค่า  $P(v)$  ของการแจกแจงอัตราเร็วแบบแมกซ์เวลล์จะได้

$$v_{avg} = \int_0^{\infty} v P(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\} dv$$

และจากตาราง  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$  เราจะได้ว่า

$$v_{avg} = \sqrt{\frac{8kt}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

# $V_{rms}$

$v_{rms}$  คือค่าเฉลี่ยของอัตราเร็วกำลังสอง ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$(v_{rms})^2 = \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 P(v) dv$$

แทนค่า  $P(v)$  ของการแจกแจงอัตราเร็วแบบแมกซ์เวลล์จะได้

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 P(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^4 \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\} dv$$

และจากตาราง  $\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$  เราจะได้ว่า

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

นั่นคือ

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

# อัตราเร็วที่เป็นไปได้มากที่สุด $v_m$

อัตราเร็วที่เป็นไปได้มากที่สุดสามารถคำนวณได้จาก

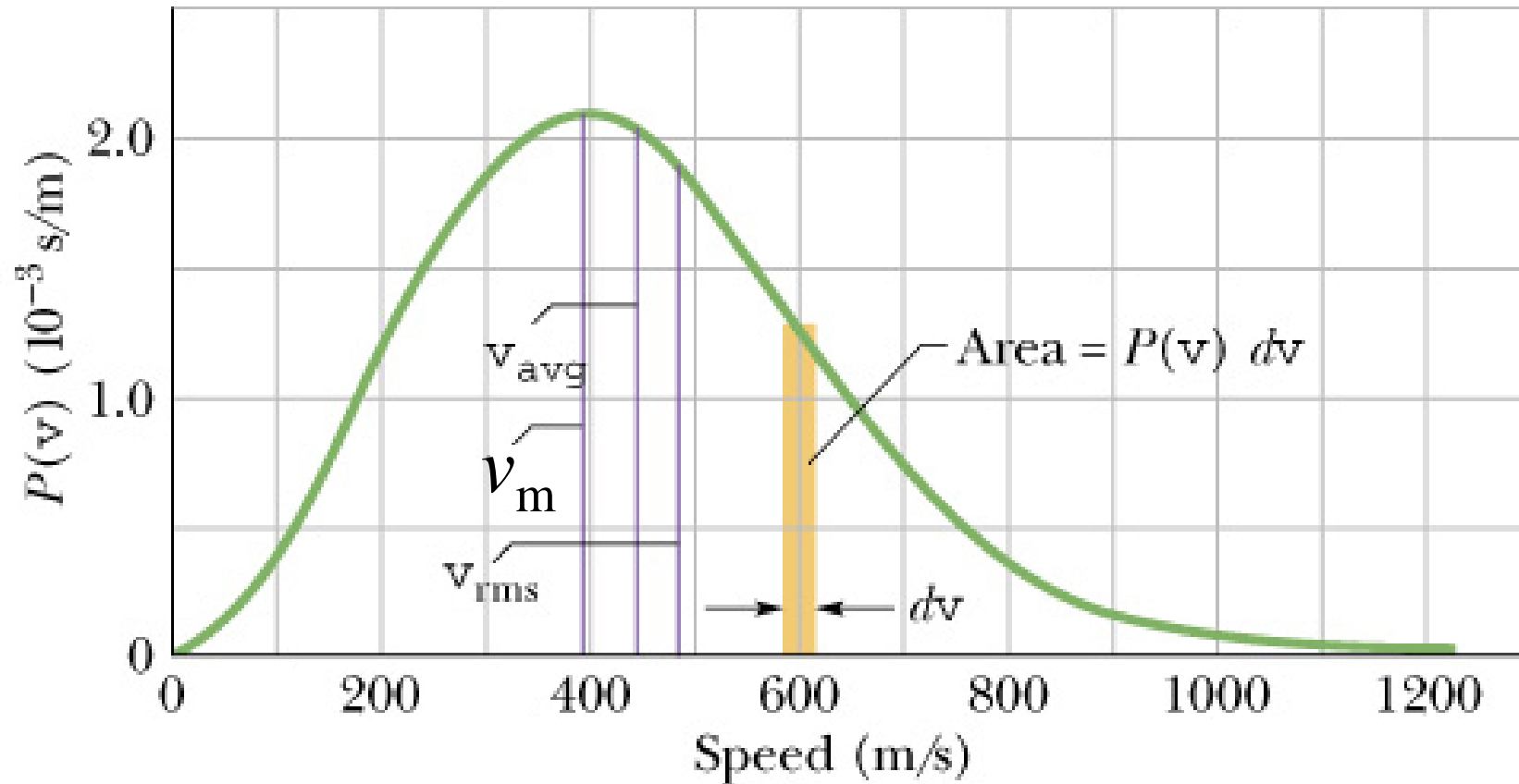
$$v = v_m, \quad \left. \frac{dP}{dv} \right|_{v=v_m} = 0$$

$$\left. \frac{dP}{dv} \right|_{v=v_m} = v_m^2 \exp(-mv_m^2/2kT) \left( -\frac{mv_m}{kT} \right) + 2v_m \exp(-mv_m^2/2kT) = 0$$

นั่นคือ  $\frac{mv_m^2}{kT} = 2$  ซึ่งจะได้ว่า

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

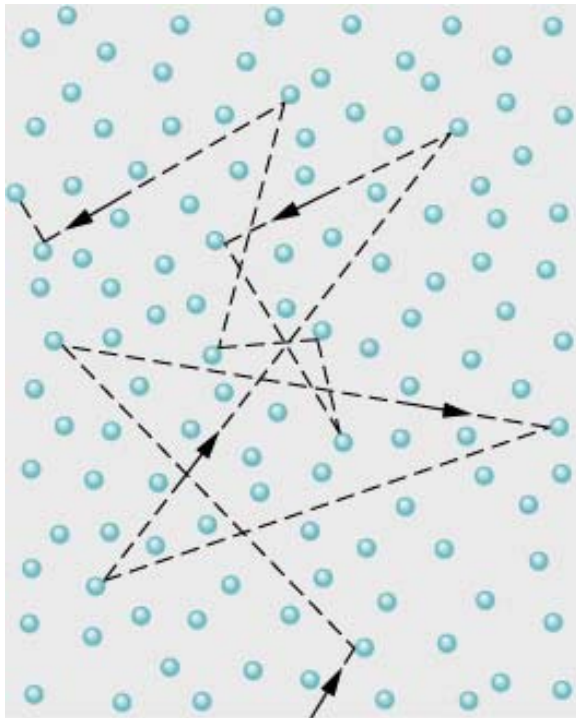
# กราฟแจกแจงอัตราเร็วของก๊าซ



$$v_m < v_{avg} < v_{rms} = 1 : 1.128 : 1.224$$

# เส้นทางอิสระเฉลี่ย (Mean Free Path)

เส้นทางอิสระเฉลี่ย หรือ Mean free path คือระยะทางเฉลี่ยที่โมเลกุลสามารถเคลื่อนที่ได้ก่อนที่จะชนกับโมเลกุลอื่น ใช้สัญลักษณ์ว่า  $\lambda$



โดย

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V}$$

ซึ่งจะเห็นว่าเส้นทางอิสระเฉลี่ยจะแปรผกผันกับ  
ความหนาแน่นโมเลกุล  $N/V$   
และแปรผกผันกับขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลาง  
ของโมเลกุล  $d$  ยกกำลังสอง

หนังสืออิเล็กทรอนิกส์	
ฟิสิกส์ 1(ภาคกลศาสตร์(	ฟิสิกส์ 1 (ความร้อน)
ฟิสิกส์ 2	กลศาสตร์เวกเตอร์
โลหะวิทยาฟิสิกส์	เอกสารคำสอนฟิสิกส์ 1
ฟิสิกส์ 2 (บรรยาย(	แก้ปัญหาฟิสิกส์ด้วยภาษา C
ฟิสิกส์พิศวง	สอนฟิสิกส์ผ่านทางอินเทอร์เน็ต
ทดสอบออนไลน์	วิดีโอการเรียนการสอน
หน้าแรกในอดีต	แผ่นใสการเรียนการสอน
เอกสารการสอน PDF	กิจกรรมการทดลองทางวิทยาศาสตร์
แบบฝึกหัดออนไลน์	สุดยอดสิ่งประดิษฐ์
การทดลองเสมือน	
บทความพิเศษ	ตารางธาตุ(ไทย1) 2 (Eng)
พจนานุกรมฟิสิกส์	ลับสมองกับปัญหาฟิสิกส์
ธรรมชาติมหัศจรรย์	สูตรพื้นฐานฟิสิกส์
การทดลองมหัศจรรย์	ดาราศาสตร์ราชมงคล
แบบฝึกหัดกลาง	
แบบฝึกหัดโลหะวิทยา	แบบทดสอบ
ความรู้รอบตัวทั่วไป	อะไรเอ่ย ?
ทดสอบ)เกมเศรษฐี(	คติปริศนา
ข้อสอบเอนทรานซ์	เฉลยกลศาสตร์เวกเตอร์
คำศัพท์ประจำสัปดาห์	
ความรู้รอบตัว	
การประดิษฐ์ของโลก	ผู้ได้รับโนเบลสาขาฟิสิกส์
นักวิทยาศาสตร์เทศ	นักวิทยาศาสตร์ไทย
ดาราศาสตร์พิศวง	การทำงานของอุปกรณ์ทางฟิสิกส์
การทำงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ	

 <b>การเรียนรู้การสอนฟิสิกส์ 1</b> <span style="float: right;"></span>	
1. การวัด	2. เวกเตอร์
3. การเคลื่อนที่แบบหนึ่งมิติ	4. การเคลื่อนที่บนระนาบ
5. กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	6. การประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
7. งานและพลังงาน	8. การดลและโมเมนตัม
9. การหมุน	10. สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง
11. การเคลื่อนที่แบบคาบ	12. ความยืดหยุ่น
13. กลศาสตร์ของไหล	14. ปริมาณความร้อน และ กลไกการถ่ายโอนความร้อน
15. กฎข้อที่หนึ่งและสองของเทอร์โมไดนามิก	16. คุณสมบัติเชิงโมเลกุลของสสาร
17. คลื่น	18. การสั่น และคลื่นเสียง
 <b>การเรียนรู้การสอนฟิสิกส์ 2</b> <span style="float: right;"></span>	
1. ไฟฟ้าสถิต	2. สนามไฟฟ้า
3. ความกว้างของสายฟ้า	4. ตัวเก็บประจุและการต่อตัวต้านทาน
5. ศักย์ไฟฟ้า	6. กระแสไฟฟ้า
7. สนามแม่เหล็ก	8. การเหนี่ยวนำ
9. ไฟฟ้ากระแสสลับ	10. ทรานซิสเตอร์
11. สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเสาอากาศ	12. แสงและการมองเห็น
13. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	14. กลศาสตร์ควอนตัม
15. โครงสร้างของอะตอม	16. นิวเคลียร์
 <b>การเรียนรู้การสอนฟิสิกส์ทั่วไป</b> <span style="float: right;"></span>	
1. จลศาสตร์ (kinematic)	2. จลพลศาสตร์ (kinetics)
3. งานและโมเมนตัม	4. ซิมเปิลฮาร์โมนิก คลื่น และเสียง
5. ของไหลกับความร้อน	6. ไฟฟ้าสถิตกับกระแสไฟฟ้า
7. แม่เหล็กไฟฟ้า	8. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับแสง
9. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ อะตอม และนิวเคลียร์	

