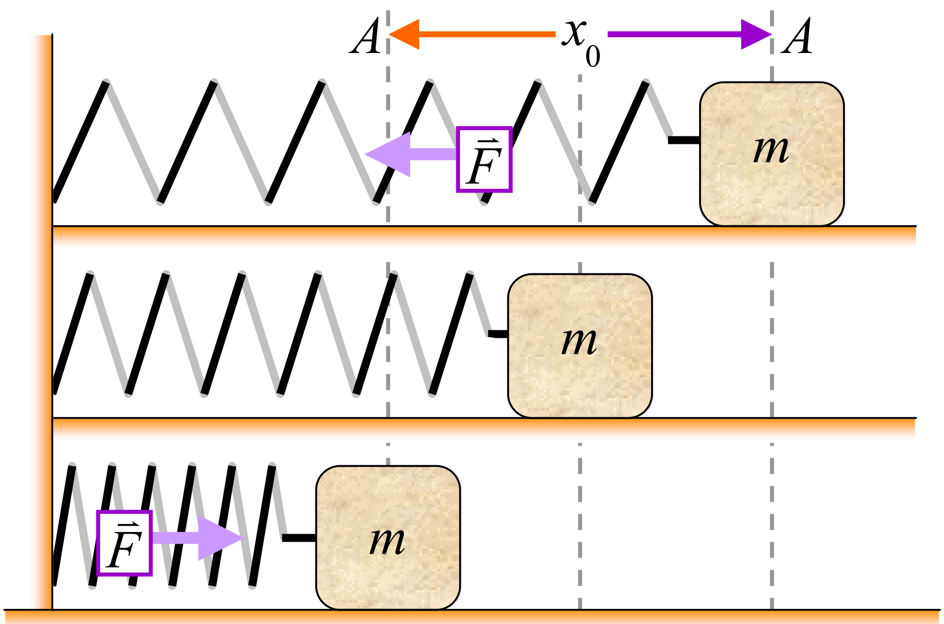
บทที่ 9 การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก

การเคลื่อนที่ ที่มีแรงกระทำต่อวัตถุสัมพันธ์กันกับระยะกระจัดที่ออกจากตำแหน่งสมดุลเดิม ถ้าแรงกระทำซ้ำไปซ้ำมาในการเคลื่อนที่ เรียกการเคลื่อนที่ชนิดนี้ว่า Periordic motion, Harmonic motion, Oscillation, Vibration เช่น การสั่นของลูกตุ้มนาฬิกา การสั่นของอะตอม สายกีตาร์ เวลาที่ใช้ในการสั่นครบหนึ่งรอบ เรียกว่า 1 คาบ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความถี่ในการสั่นดังนี้ คือ $f = \dfrac{1}{T}$ มีหน่วยเป็น เฮิร์ซ หรือ รอบต่อวินาที

1. การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

พิจารณาวัตถุมวล m ติดสปริงซึ่งมีค่าคงตัว k ถ้าดึงวัตถุทำให้สปริงยืดออกไปเป็นระยะ $x = A$ แล้วปล่อยวัตถุ วัตถุจะเคลื่อนที่กลับไปกลับมา ด้วยระยะที่ออกจากแนวสมดุลเท่ากับ A ทั้งสองข้างของแนวสมดุล



จากกฎข้อที่สองของนิวตันได้ว่า $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = -k\vec{x}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{x}$$

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$

สมการการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก เขียนได้ว่า

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{x} = 0$$

พิจารณาพลังงานของวัตถุขณะเคลื่อนที่ จากสมการ $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{x}$

$$m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -kx$$

$$mv\frac{dv}{dx} = -kx$$

$$mvdv + kxdx = 0$$

ทำการอินทริเกรตสมการ

$$\int mvdv + \int kxdx = 0$$

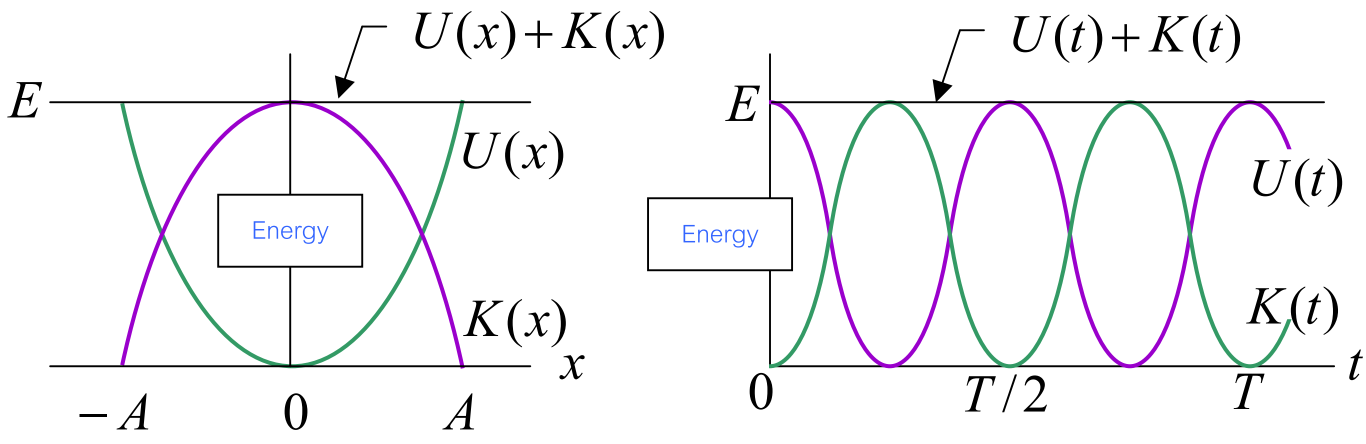
$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = Constant$$

จะเห็นได้ว่า หากไม่มีแรงภายนอกมากระทำ พลังงานของวัตถุในการสั่นจะคงที่เสมอ เป็นไปตามหลักการคงตัวของพลังงานกล สรุปได้ว่าที่ปลายสุดของการเคลื่อนที่ ความเร็วมีค่าเท่ากับศูนย์ พลังงานกลรวมเท่ากับ $\tfrac{1}{2}kA^2$ และที่ตำแหน่งสมดุลมีความเร็วสูงสุด v_{max} ดังนั้นสามารถเขียนสมการได้ว่า

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}mv_{max}^2$$

ที่ตำแหน่งใด ๆ	ที่ตำแหน่งปลาย	ที่ตำแหน่งสมดุล

ดังนั้นสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง พลังงานศักย์ $U(x)$ และพลังงานจลน์ $K(x)$ ในฟังก์ชันของตำแหน่ง และฟังก์ชันของเวลา ดังรูปกราฟ



จากสมการ $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_{\max}^2$ แก้สมการได้ว่า

การกระจัดสูงสุดคือ $x_{\max}=A=\pm\sqrt{\dfrac{2E}{k}}$

ความเร็วสูงสุดคือ $v_{\max}=\pm\sqrt{\dfrac{2E}{m}}$

ความเร็วที่ตำแหน่งใด ๆ $v=\sqrt{\dfrac{2E-kx^2}{m}}$

$$v=\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2-x^2}$$

หรือ $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sqrt{A^2-x^2}$

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\,dt$$

ทำการอินทริเกรต ได้ว่า $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\int dt$

ผลลัพธ์จากสมการ แก้ได้ดังสมการ

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)=\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+C_1$$

เงื่อนไขเริ่มต้น ถ้า $t=0\ ;\ x=x_0$ จะได้ $C_1=\sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)=\theta_0$ สามารถเขียนสมการใหม่ได้ว่า

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)=\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\theta_0$$

ได้สมการผลลัพธ์คือ

$$x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\theta_0\right)$$

จากฟังก์ชันไซน์จะมีลักษณะซ้ำรอบเหมือนเดิม เมื่อมุมเปลี่ยนไป 2π เรเดียน หรือเวลาเปลี่ยนแปลงไป 1 คาบ ดังนั้น ได้เงื่อนไขว่า

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T)+\theta_0=\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\theta_0\right)+2\pi$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,T=2\pi$$

สามารถเขียนในรูปของคาบ ความถี่ และอัตราเร็วเชิงมุม(ความถี่เชิงมุม)ได้ว่า

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega=2\pi f=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

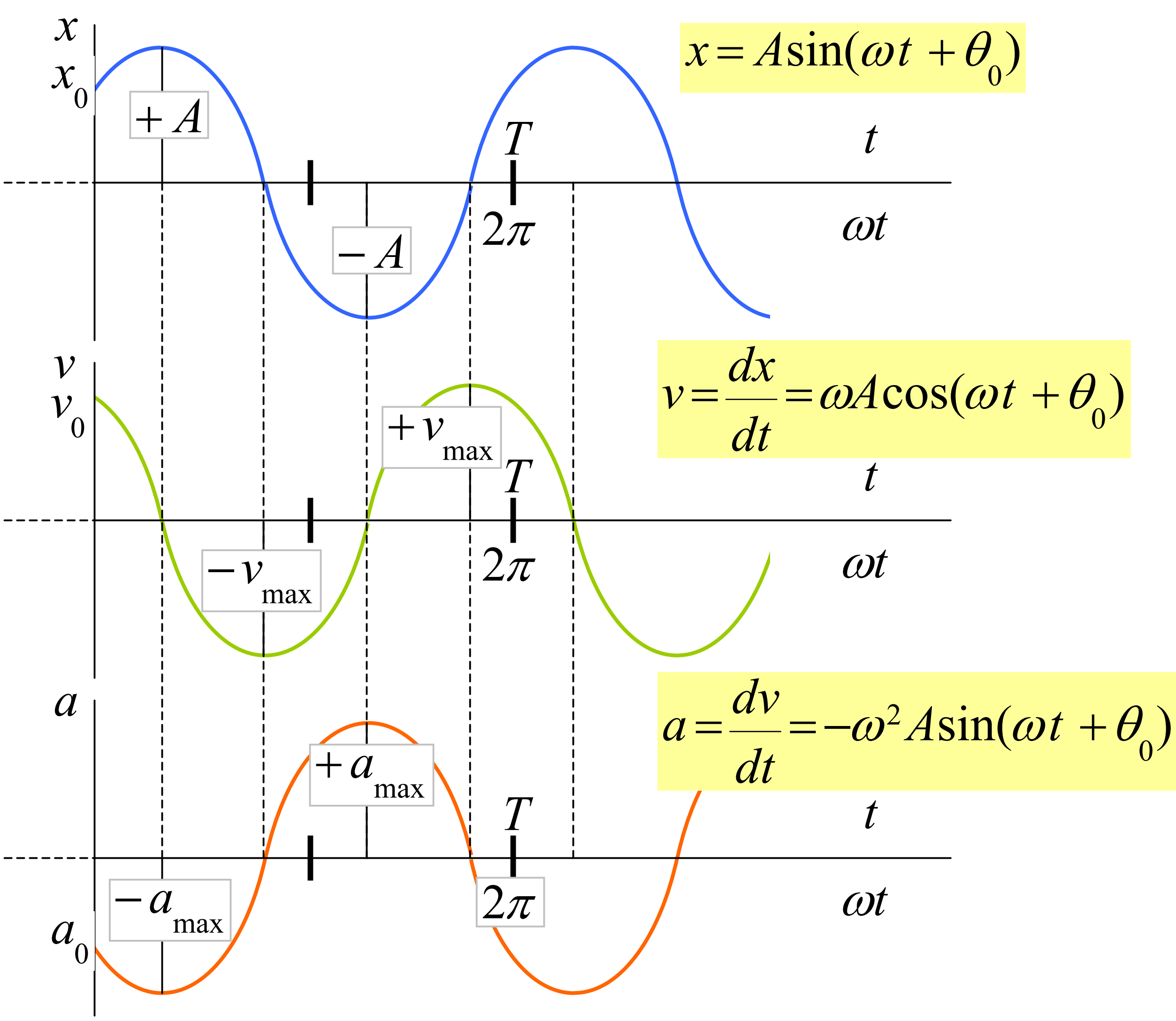
ดังนั้นจากผลลัพธ์

การกระจัด $\quad x=A\sin(\omega t+\theta_0)$

ความเร็ว $\quad v=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\theta_0)$

ความเร่ง $\quad a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\sin(\omega t+\theta_0)$ หรือ $a=-\omega^2 x$

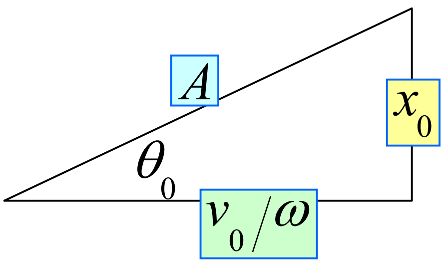
สามารถเขียนกราฟได้ดังรูป



พิจารณาที่เวลา $t = 0$; $x = x_0$; $\theta = \theta_0$; $v = v_0$ จะได้สมการว่า

$$\sin\theta_0 = \frac{x_0}{A} \qquad \text{และ} \qquad \cos\theta_0 = \frac{v_0}{\omega A}$$

จากความสัมพันธ์ $\sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 = 1 = (\frac{x_0}{A})^2 + (\frac{v_0}{\omega A})^2$ เขียนใหม่ได้ว่า



$$A^2 = x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2$$

พิจารณาที่ $t=0$ และให้วัตถุอยู่ตำแหน่งปลายสุด $x=A$ จะได้ว่า $\sin\theta_0=1$ ดังนั้นเฟสเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ สามารถเขียนสมการได้ว่า

การกระจัด $x=A\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=A\cos(\omega t)$

ความเร็ว $v=\omega A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})=-\omega A\sin(\omega t)$

ความเร่ง $a=-\omega^2 A\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=-\omega^2 A\cos(\omega t)$ หรือ $a=-\omega^2 x$

พิจารณาที่ $t=0$ และให้วัตถุอยู่ตำแหน่งสมดุล $x=0$ จะได้ว่า $\sin\theta_0=0$ ดังนั้นเฟสเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ $\theta_0=0$ สามารถเขียนสมการได้ว่า

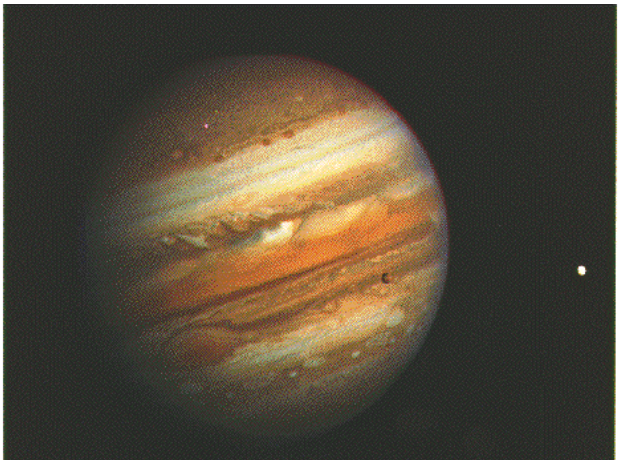
การกระจัด $x=A\sin(\omega t+0^\circ)=A\sin(\omega t)$

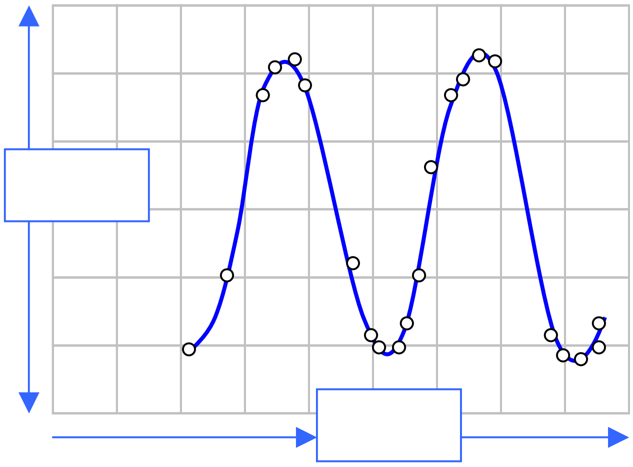
ความเร็ว $v=\omega A\cos(\omega t+0^\circ)=\omega A\cos(\omega t)$

ความเร่ง $a=-\omega^2 A\sin(\omega t+0^\circ)=-\omega^2 A\sin(\omega t)$ หรือ $a=-\omega^2 x$

2. S.H.M.กับการเคลื่อนที่แบบวงกลมสม่ำเสมอ

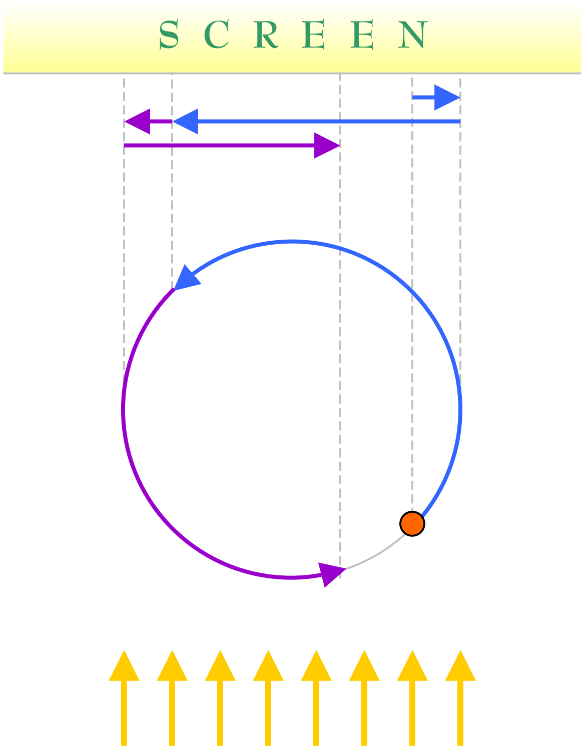
ในปี ค.ศ.1610 กาลิเลโอ ส่องกล้องไปยังดาวพฤหัสฯ ทำการบันทึกการเคลื่อนที่ของบริวาร 4 ดวง ภายหลัง A.P.French นำข้อมูลของกาลิเลโอมาพล๊อตกราฟ ได้ข้อมูลดังรูป

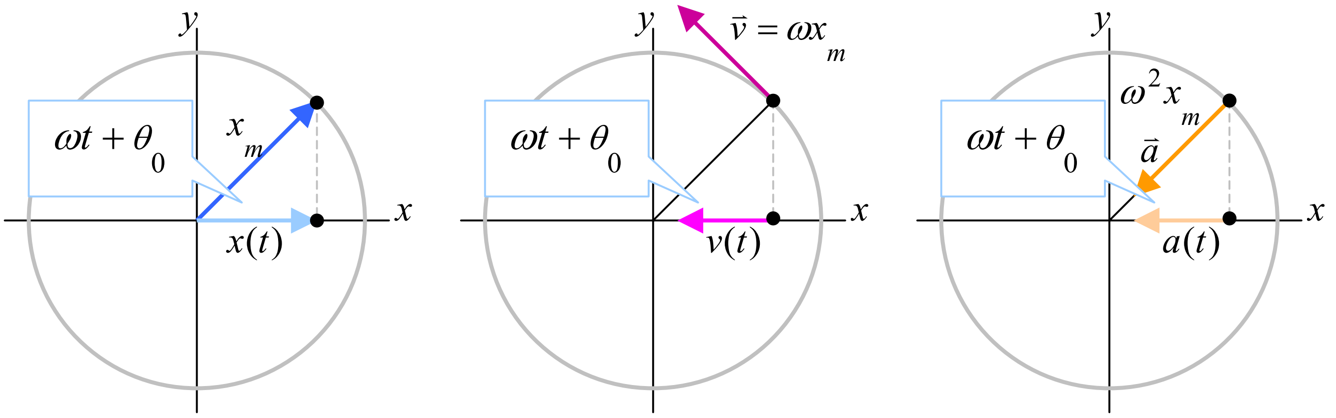




จากกราฟ ถูกอธิบายโดย S.H.M. ซึ่งได้คาบระยะเวลา 16.8 วัน

พิจารณา เงาของอนุภาคบนฉากด้านหลัง ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นวงกลม จากรูปจะเห็นได้ว่า เงาจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง กลับไปกลับมาซ้ำรอบเดิม ซึ่งมีคาบการเคลื่อนที่ ที่แน่นอน เป็นการเคลื่อนที่แบบ S.H.M. (กำหนดให้ แสงส่องเข้าใส่อนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลวม เป็นลักษณะแสงขนาน Parallel ray)





จากรูป พิจารณา ตำแหน่ง ความเร็วและความเร่ง ของอนุภาคที่เวลาใด ๆ ได้ดังรูป จากรูปสามารถเขียนสมการได้ว่า

การกระจัด $\quad x = x_m \cos(\omega t + \theta_0)$

ความเร็ว $\quad v = -\omega x_m \sin(\omega t + \theta_0)$

ความเร่ง $\quad a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \theta_0)$ หรือ $a = -\omega^2 x$

พลังงานจลน์ของวัตถุ

$$\begin{aligned} E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin(\omega t + \theta_0) \\ &= \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2\left[1-\sin^2(\omega t + \theta_0)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}m\omega^2 (x_m^2 - x^2) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า พลังงานจลน์สูงสุดที่จุดสมดุล $x=0$ และมีค่าเป็นศูนย์ที่ $x = \pm x_m$

หากพิจารณา การเคลื่อนที่ของวัตถุติดปลายสปริง พลังงานศักย์ที่สะสมในสปริงสามารถหาได้จาก แรงอนุรักษ์ตามสมการ $F = -\dfrac{dE_p}{dx}$ แทนค่าแรงสปริงได้ $-kx = -\dfrac{dE_p}{dx}$ ทำการอินทริเกรตได้ว่า $E_p = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$

จากกฎอนุรักษ์พลังงาน สามารถเขียนได้ว่า

$$E = E_p + E_k = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 = Constant$$

3. การประยุกต์ใช้ S.H.M.

จากการศึกษาข้างต้น สามารถเขียนสมการทั่วไปของการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายได้ว่า $F = ma = -m\omega^2 x$

$$ma + m\omega^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ซึ่งผลลัพธ์ของสมการ สามารถเขียนในรูปสมการเคลื่อนที่ในรูปฟังก์ชันโคไซน์

$$x = x_m \cos(\omega t + \theta_0)$$

สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายเชิงมุมสามารถเขียนได้ว่า

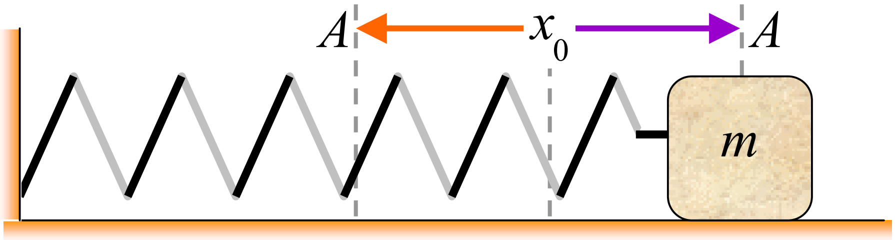
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

ทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์สมการฮาร์มอนิกอย่างง่ายเชิงมุม สามารถเขียนเป็น

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \theta_0)$$

หลักการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก สามารถนำไปใช้เป็นเครื่องมือแบบต่าง ๆ ได้ เช่น ลูกตุ้มเพนดูลัม การออสซิเลตในวงจรไฟฟ้า การสั่นด้วยสปริง การสั่นของอะตอม เป็นต้น

3.1 วัตถุติดสปริงในแนวราบบนพื้นเกลี้ยง



แรงกระทำสปริง $F=-kx$ จากกฎของนิวตัน $F=ma$

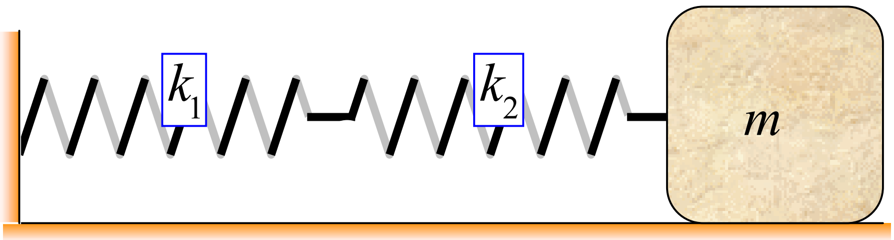
จะได้ว่า $-kx=ma$ และจากความสัมพันธ์ $a=-\omega^2 x$

จะได้ว่า $\frac{k}{m}=\omega^2$ หรือ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

ดังนั้น คาบของการเคลื่อนที่ มีค่าเท่ากับ

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ หรือ } f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

พิจารณาการนำสปริง 2 อันมาต่ออนุกรมกัน แล้วติดมวลดังรูป



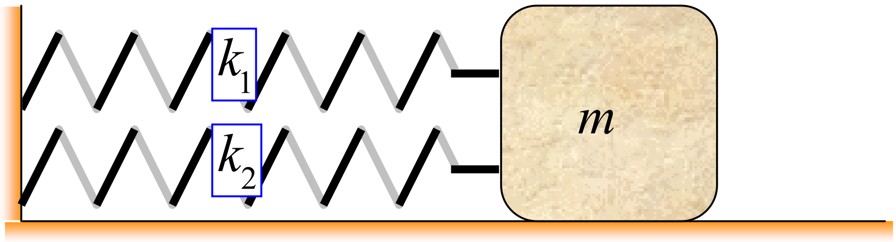
แรงดึงในชุดสปริงจะมีค่าเท่ากันตลอด การกระจัดรวมเท่ากับการกระจัดย่อยรวมกัน ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างค่านิจของสปริงคือ

$$x=x_1+x_2$$

$$\frac{F}{-k}=\frac{F}{-k_1}+\frac{F}{-k_2}$$

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

พิจารณาการนำสปริงยาวเท่ากัน 2 อันมาต่อขนานกัน แล้วติดมวลดังรูป



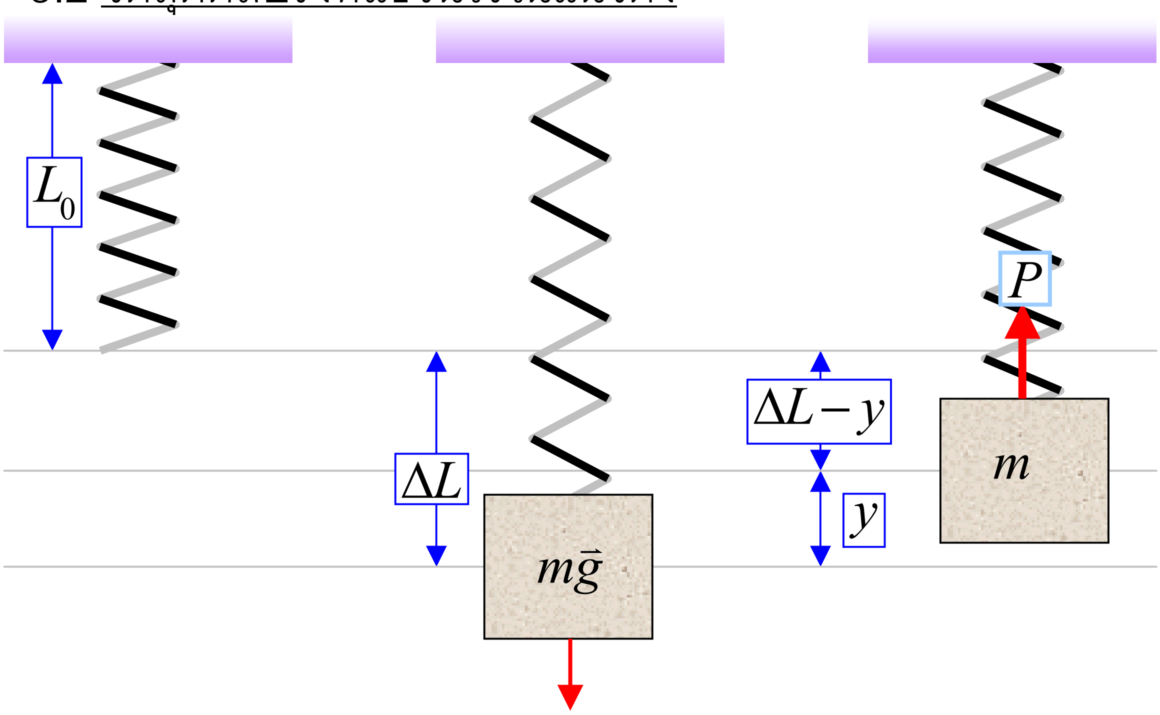
การกระจัดในชุดสปริงจะมีค่าเท่ากัน แรงรวมเท่ากับแรงย่อยรวมกัน ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างค่านิจของสปริงคือ

$$F = F_1 + F_2$$

$$-kx = -k_1 x + -k_2 x$$

$$k = k_1 + k_2$$

3.2 วัตถุติดสปริงที่แขวนไว้ในแนวดิ่ง



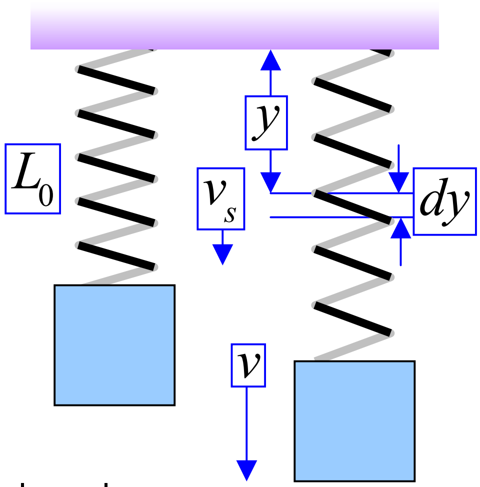
พิจารณา สปริงเดิมยาว L_0 เมื่อแขวนวัตถุมวล m จะทำให้สปริงยืดออก ΔL ซึ่งอยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้นแรงที่จุดสมดุล สมดุลระหว่าง น้ำหนักและแรงสปริง $mg = k\Delta L$

พิจารณาในการสั่นของสปริง ขณะที่สปริงห่างจากแนวสมดุลขึ้นไปเป็นระยะ y แรงที่สปริงดึงขึ้นมีค่าเท่ากับ $P = k(\Delta L - y)$

แต่ตำแหน่งนี้ ไม่ได้อยู่ในสภาวะสมดุล ซึ่งเป็นไปตามกฎของนิวตัน

ดังนั้นแรงลัพธ์กระทำบนวัตถุ $k(\Delta L - y) - mg = -ky$

ในความเป็นจริง สปริงมีมวล m_s มีการสั่นหรือออสซิเลตไปตามวัตถุด้วย ดังนั้นจำต้องพิจารณาผลของการสั่น เนื่องจากมวลของสปริง เช่น คาบการสั่นหรือความถี่ของการสั่น



จากรูปจะเห็นได้ว่า มวลของสปริงแต่ละส่วนเคลื่อนที่ด้วยแอมพลิจูดไม่เท่ากัน พิจารณา มวลสปริงเล็ก ๆ dm_s ในส่วนสั้น ๆ dy ห่างจากปลายบน y ได้ว่า

$$dm_s = \frac{m_s}{L_0} dy$$

แต่ความเร็ว $\vec{v}$ ของการสั่นของวัตถุเป็นสัดส่วนโดยตรงกับการกระจัด y ดังความสัมพันธ์ $\frac{v_s}{v} = \frac{y}{L_0}$ หรือ $v_s = (\frac{y}{L_0})v$

พิจารณาพลังงานจลน์ในวัตถุ

$$dE_k = \frac{1}{2} dm_s v_s^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_s}{L_0} dy (\frac{y}{L_0})^2 v^2$$

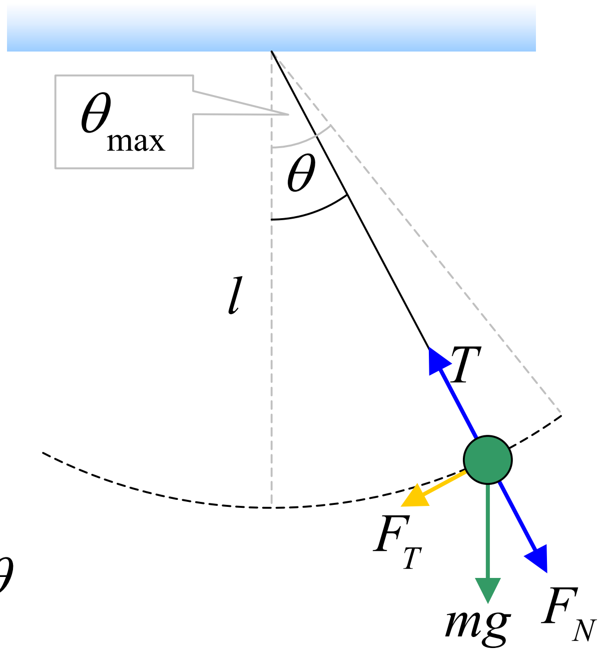
$$E_k = \frac{m_s v^2}{2L_0^3} \int_0^L y^2 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} m_s\right] v^2$$

หลังจากการอินทริเกรต จะเห็นว่า สปริงเหมือนวัตถุหนึ่งซึ่งนำมวลเพียงหนึ่งในสามของมวลสปริง $\frac{m_s}{3}$ มาคิดคำนวณ หรือนำมาติดที่ปลายสปริงซึ่งไม่มีมวลนั่นเอง

ดังนั้นมวลของระบบการสั่น หรือออสซิเลตคือ $M = m + \frac{m_s}{3}$ และคาบของการสั่นมีค่าเท่ากับ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_s}{3}}{k}}$$

3.3 ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย



พิจารณาวัตถุมวล m แขวนด้วยเชือกยาว l แกว่งกลับไปกลับมาลักษณะเหมือนลูกตุ้มนาฬิกา แรงในแนวสัมผัส คือ $F_T = -mg\sin\theta$ (เครื่องหมายลบ บ่งบอกทิศตรงข้ามกับการกระจัด) โดยที่การกระจัดคือ $s = l\theta$

จากเงื่อนไขความเร่งในแนวสัมผัสวงกลม $a_T = l\alpha = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$

ดังนั้น จากแรงในแนวสัมผัส $F_T = ma_T = -mg\sin\theta$

สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้ $ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

ในการแกว่ง มุมที่แกว่งเล็ก ๆ ค่า $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ จะได้ว่า

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

แก้สมการได้ผลลัพธ์ว่า สมการมูลฐานฮาร์มอนิกอย่างง่ายของลูกตุ้มคือ

$$\theta = \theta_{max}\sin(\omega t + \theta_0)$$

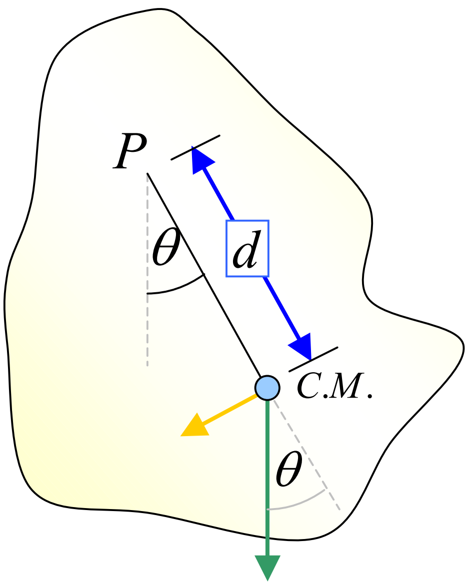
โดยที่ $$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

กรณี $\theta_{max} \geq 15°$ สมการคาบจะเปลี่ยนไปเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{4^2}\sin^4\frac{\theta_{max}}{2} + \ldots)$$

3.4 ลูกตุ้มนาฬิกาฟิสิกัล

พิจารณาวัตถุ ไม่จำกัดรูปร่าง แกว่งรอบแกน (จุด P) แรงในแนวสัมผัสมีค่าเท่ากับ $(mg\sin\theta)$



โมเมนต์เท่ากับ $$\Gamma = -mgd\sin\theta$$

ซึ่งจากความสัมพันธ์ $$\Gamma = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0$$

ในการแกว่ง มุมที่แกว่งเล็ก ๆ ค่า $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ จะได้ว่า

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$$

ผลลัพธ์สมการมูลฐานฮาร์มอนิกอย่างง่ายของลูกตุ้มฟิสิกัลคือ

$$\theta = \theta_{\max} \sin(\omega t + \theta_0)$$

โดยที่ $$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

ดังนั้นสามารถหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุได้จากความสัมพันธ์

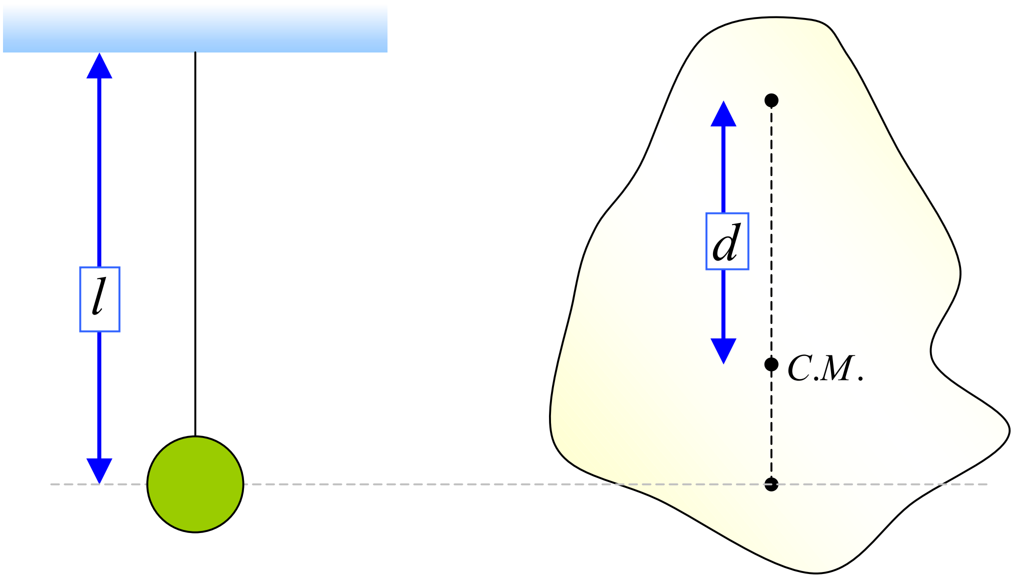
$$I = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2}$$

3.5 <u>จุดศูนย์กลางของการแกว่ง (Center of oscillation)</u>

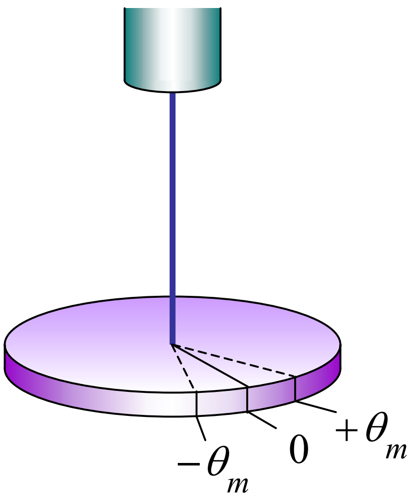
เทียบความสัมพันธ์ระหว่างลูกตุ้มนาฬิกาและลูกตุ้มฟิสิกัล โดยให้คาบเท่ากัน จะเห็นได้ว่า $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$

ได้ความสัมพันธ์ว่า $l = \frac{I}{md}$

จะเห็นได้ว่า เสมือนว่า ลูกตุ้มฟิสิกัลแกว่งเสมือนว่ามวลไปรวมอยู่ที่จุดหนึ่งห่างจากจุดหมุนเท่ากับ $\frac{I}{md}$ ซึ่งเรียกว่า จุดศูนย์กลางของการแกว่ง



3.6 ลูกตุ้มนาฬิกาแบบทอร์ชัน (Angular S.H.M.)



วัตถุมวล m แขวนไว้ที่ปลายเส้นลวดที่มีความยืดหยุ่น ทนต่อการบิด เมื่อทำการหมุนวัตถุแล้วปล่อย วัตถุจะบิดกลับไปกลับมาได้มุมสูงสุด θ_m กำหนดให้ ค่าคงที่สำหรับการบิดของเส้นลวดคือ κ (Torsion constant) ซึ่งขึ้นกับความยาวเส้นผ่าศูนย์กลางและวัสดุที่มาทำเส้นลวด

เมื่อวัตถุถูกบิดไปเป็นมุมเล็ก ๆ θ จากกฎของฮุค จะได้ $\Gamma = -\kappa\theta$

จากความสัมพันธ์ $$\Gamma = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ได้ว่า $$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

สมการมูลฐานการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของลูกตุ้มแบบทอร์ชันคือ

$$\theta = \theta_{\max}\sin(\omega t + \theta_0)$$

โดยที่ $$\omega^2 = \frac{\kappa}{I} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

หลักการนี้ได้ถูกนำมาใช้ในเครื่องมือประจำห้องปฏิบัติการ เช่น มัลติมิเตอร์ กัลวานอมิเตอร์ เป็นต้น

4. การรวมกันของสองฮาร์มอนิกอย่างง่าย

การรวมกันของการเคลื่อนที่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับ Superposition ที่ว่า ผลรวมของการกระจัดของอนุภาคคือ การกระจัดของอนุภาคที่เกิดจากการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายแต่ละอันรวมกัน ใช้ในการศึกษาการเลี้ยวแบนและแทรกสอดของคลื่น

4.1 เมื่ออยู่ในทิศเดียวกัน ความถี่เท่ากัน

$$x_1 = A_1 \sin \omega t$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \theta)$$

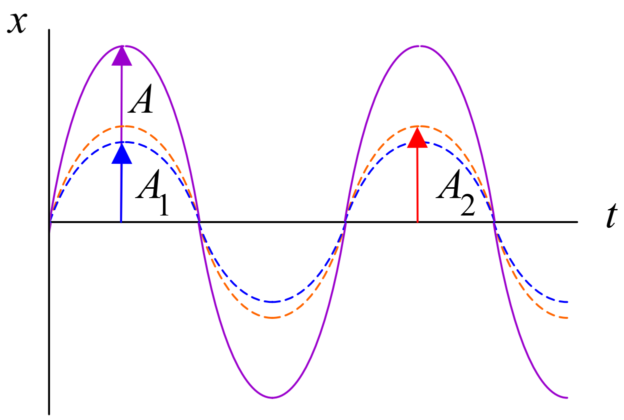
$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin(\omega t + \theta)$$

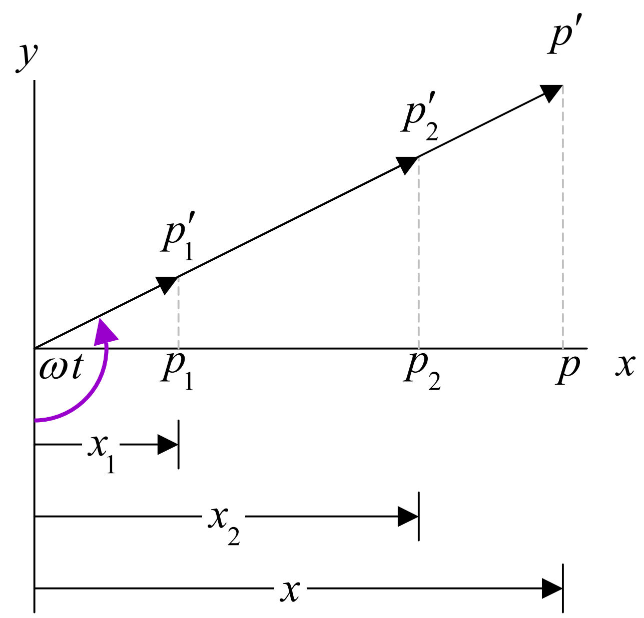
ถ้า $\theta = 0°$ ก็คือการเคลื่อนที่ทั้งสองมีเฟสตรงกัน จะได้สมการว่า

$$x = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin \omega t$$

$$x = (A_1 + A_2) \sin \omega t$$

$$x = A \sin \omega t$$



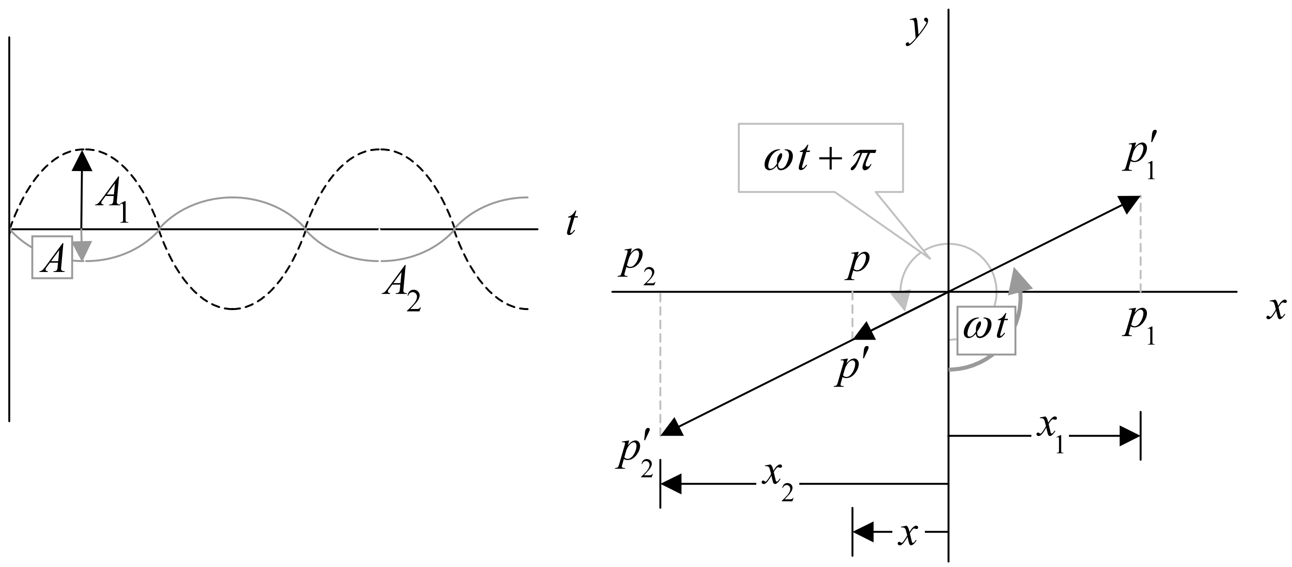


™µ $\theta = \pi$ „È ‡ „ µº¦ÉĄ ºÉÊÎšŞñ µ Š ºÁÉ ¢ Á¥¸„ èÅ — ¤ ŋ µµ¦ ª

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \pi) = -A_2 \sin \omega t$$

$$x = A_1 \sin \omega t - A_2 \sin \omega t = (A_1 - A_2) \sin \omega t$$

™µ $A_1 = A_2 \quad ; \quad A = 0$



Ä œ „ ´‡ ÉÅ ªÅª ž Ÿ µ Š ». ¤ Á Š ¦ œ µ ³ Ä ž —

„ µ ¦ „ ¦ ³ ‹ ¦ ª ¤ $x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin(\omega t + \theta)$

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

„ µ ¦ Á É ‡ ¸ ºÉÊ ž Š Á µ „ Ÿ Š ¨ Á ª ž „ µ ‡ É ¸ Á É ¢ Â ¤ ± „ ¥ µ Š Š

Ã — ¸ ¥ ª ¤ ¸ µ É Š ™ Á µ Ã ¨ ³ Â º ¼ ¸ ¡ ‡ µ ¤

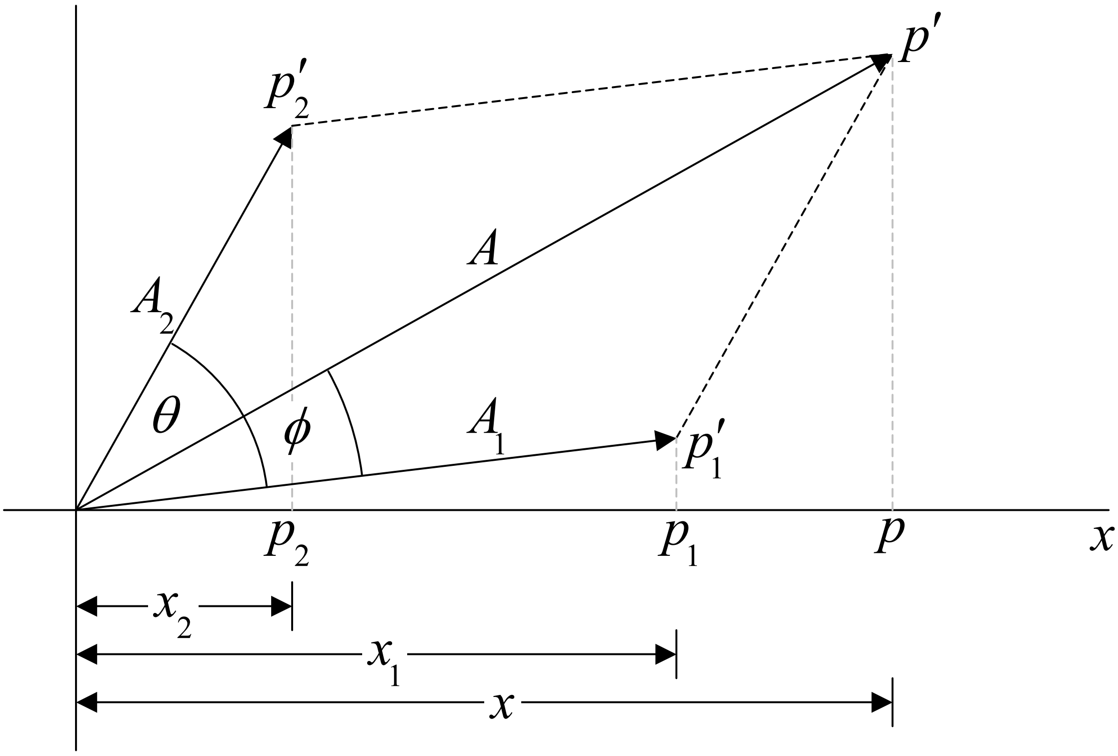
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\theta}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_2 \sin\theta}{A_1 + A_2 \cos\theta}$$

‹ µ „ - ´ ¤ ˜ š µ ¸ Š Ã ˜ „ ¦ ˜ ¤

$$A \sin(\omega t + \phi) = A \sin \omega t \cos\phi + A \cos \omega t \sin\phi$$

$$A_2 \sin(\omega t + \theta) = A_2 \sin \omega t \cos\theta + A_2 \cos \omega t \sin\theta$$



จากสมการ การกระจัดรวมเท่ากับการกระจัดของแต่ละฮาร์มอนิก

$$A\sin(\omega t+\phi)=A_1\sin\omega t+A_2\sin(\omega t+\theta)$$

สามารถเขียนสมการได้ใหม่ว่า

$$A\sin\omega t\cos\phi + A\cos\omega t\sin\phi = A_1\sin\omega t + A_2\sin\omega t\cos\theta + A_2\cos\omega t\sin\theta$$

จากสมการ ความสัมพันธ์เทอมต่อเทอม เท่ากับ

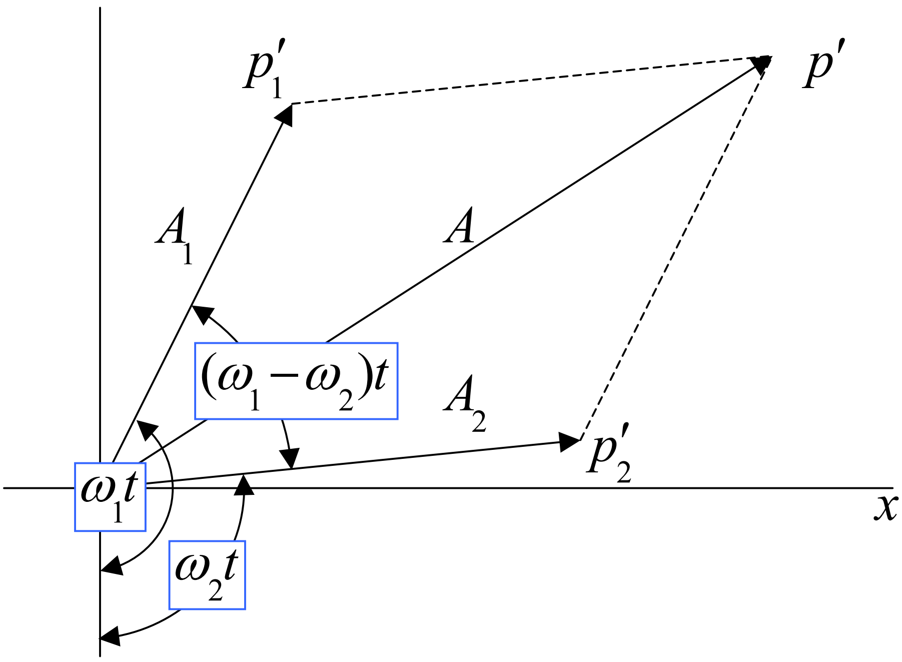
$$A\cos\phi = A_1 + A_2\cos\theta$$
$$A\sin\phi = A_2\sin\theta$$

จากสมการ ยกกำลังสองทั้งสองเทอม ได้ว่า

$$(A\cos\phi)^2+(A\sin\phi)^2=(A_1+A_2\cos\theta)^2+(A_2\sin\theta)^2$$

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\theta$$

4.2 เมื่ออยู่ในทิศเดียวกัน ความถี่ต่างกัน



สมการการเคลื่อนที่ $x_1 = A_1 \sin\omega_1 t$, $x_2 = A_2 \sin\omega_2 t$

มุมเฟสต่างกันเท่ากับ $\omega_1 t - \omega_2 t$, $(\omega_1-\omega_2)t$ ซึ่งไม่คงที่ ดังนั้นเวกเตอร์หมุนรวมด้วยความเร็วเชิงมุมไม่คงที่ การกระจัดรวมเท่ากับ $x = x_1 + x_2$ ไม่เป็นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยแอมพลิจูด คือ

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1-\omega_2)t}$$

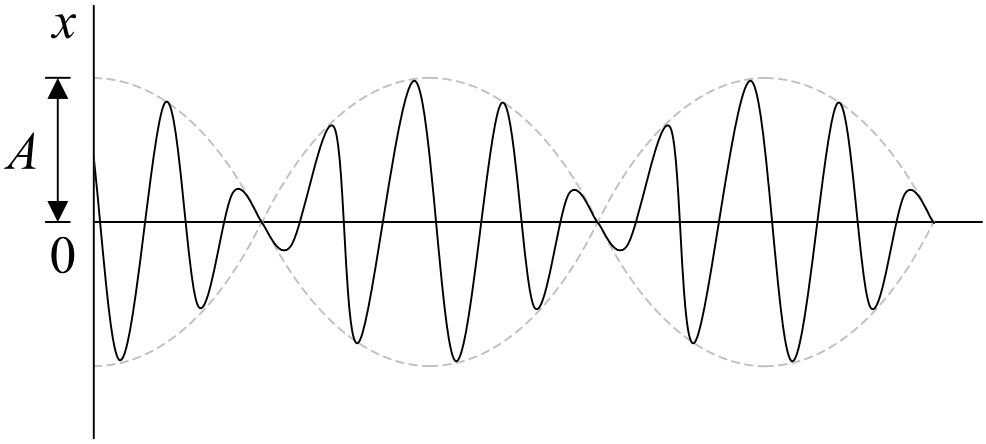
กรณี $(\omega_1-\omega_2)t = 2n\pi$; $A = A_1 + A_2$

กรณี $(\omega_1-\omega_2)t = 2n\pi + \pi$; $A = |A_1 - A_2|$

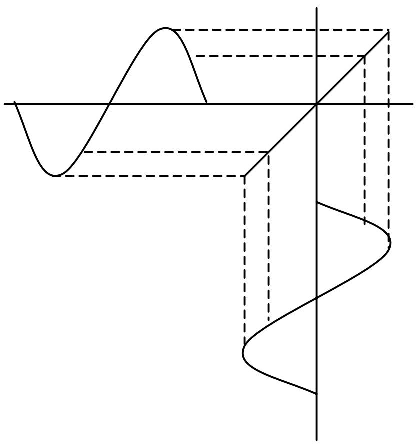
โดยที่ความถี่ของแอมพลิจูดคือ $f = \dfrac{(\omega_1-\omega_2)}{2\pi} = f_1 - f_2$

เมื่อ $A_1 = A_2$ จะได้ว่า $A = A_1\sqrt{2[1+\cos(\omega_1-\omega_2)t]}$

แอมพลิจูดจะเกิดการเปลี่ยน $A = 2A_1\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t$ ระหว่าง 0 ถึง $2A_1$



4.3 เมื่ออยู่ในทิศตั้งฉากกัน ความถี่เท่ากัน



จากสมการการเคลื่อนที่ $x = A\sin\omega t$

และสมการ $y = B\sin(\omega t + \theta)$

เมื่อ $\theta = 0°$ $y = B\sin\omega t$

ฉะนั้นได้ความสัมพันธ์ $y = \frac{B}{A}x$

เมื่อ $\theta = \pi$ $y = -B\sin\omega t$

ฉะนั้นได้ความสัมพันธ์ $y = -\frac{B}{A}x$

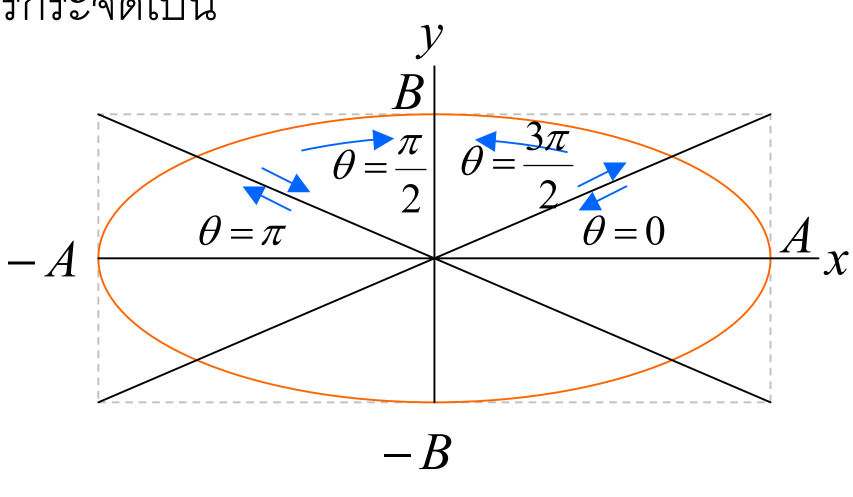
ซึ่งเป็นสมการเส้นตรง ที่มีการกระจัดเป็น

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + \frac{B^2}{A^2}y^2}$$

$$r = \frac{x}{A}\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}\sin\omega t$$



ผลที่ได้เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย มีแอมพลิจูด $\sqrt{A^2 + B^2}$

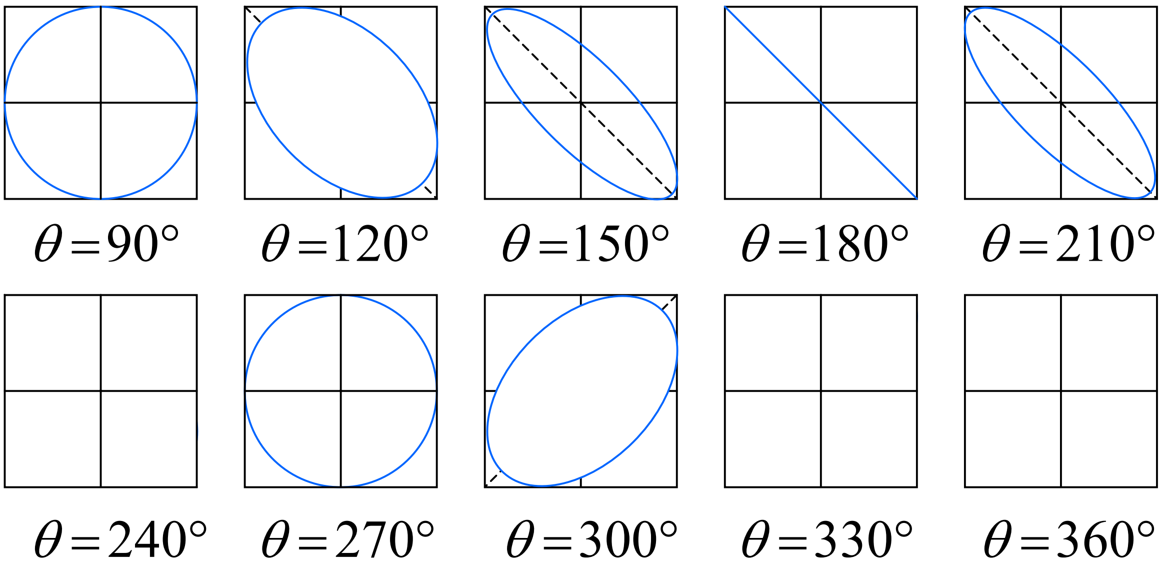
กรณีเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ได้สมการ $y = B\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = B\cos\omega t$

ได้ความสัมพันธ์สมการ $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ ซึ่งเป็นสมการวงรี

เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ได้ว่า $x = A = A\sin\omega t$ สรุปได้ว่าฟังก์ชัน $\sin\omega t = 1$ ดังนั้นที่จุด $x = A$ ความเร็วเท่ากับ $v_y = \frac{dy}{dt} = -B\omega\sin\omega t = -B\omega$ ซึ่งความเร็วของอนุภาคที่จุด $x = A$ จะขนานกับแกน y ได้เท่ากับ v_y และมีค่าเป็นลบแสดงถึงทิศลง อนุภาคจะเคลื่อนที่ตามเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta = \frac{3\pi}{2}$ หรือ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ จะได้การเคลื่อนที่เป็นรูปวงรีแต่เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกา ถ้าหากว่าขนาด $A = B$ รูปวงรีจะกลายเป็นรูปวงกลม

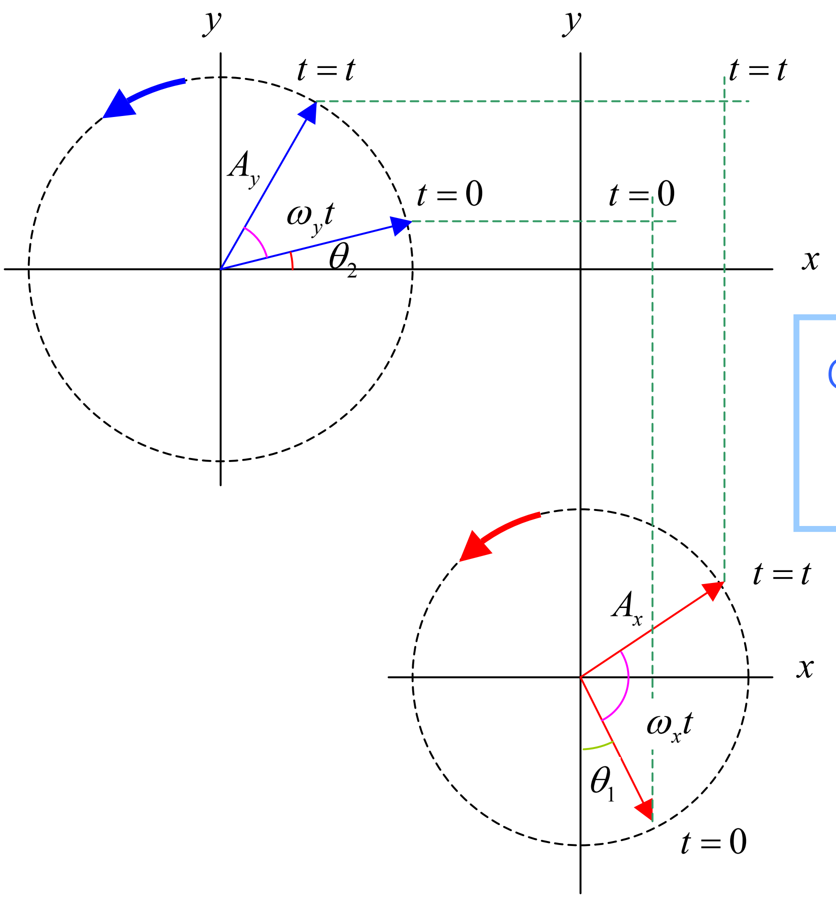
<u>ตัวอย่าง</u>ของเส้นทางซึ่งมีค่ามุมเฟสต่าง ๆ กันในกรณี $A = B$ ซึ่งพบได้ในเครื่องมือวัด Oscilloscope



$\theta = 90°$ $\theta = 120°$ $\theta = 150°$ $\theta = 180°$ $\theta = 210°$

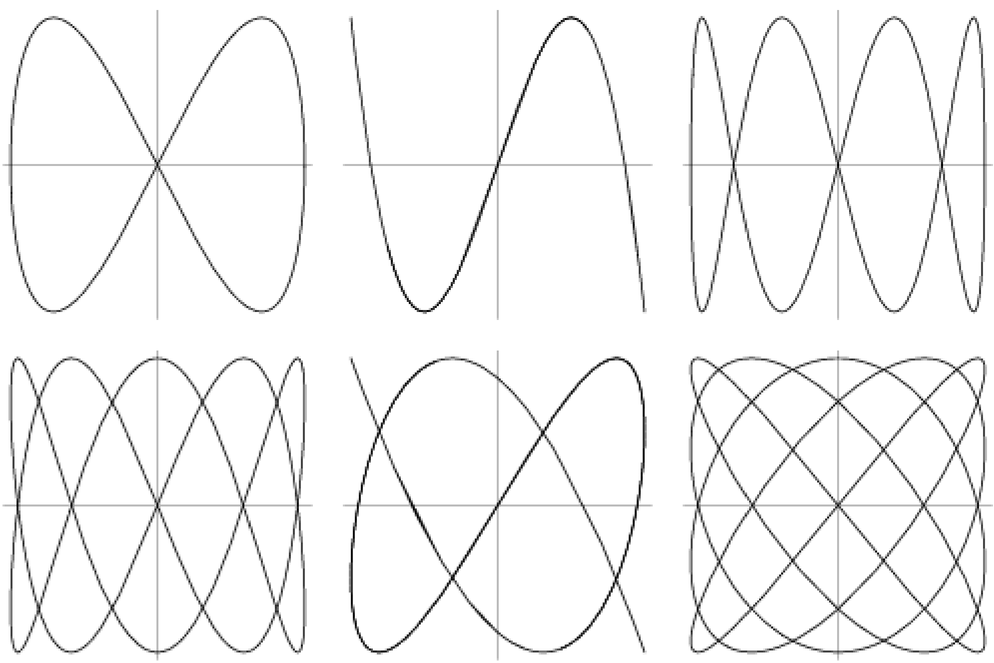
$\theta = 240°$ $\theta = 270°$ $\theta = 300°$ $\theta = 330°$ $\theta = 360°$

สำหรับการเคลื่อนที่ของสองซิมเปิลฮาร์มอนิก ที่ตั้งฉากกัน แต่ความถี่ต่างกัน ผลรวมที่ได้จะซับซ้อนกว่า ดังรูป Lissajous figures เมื่อความถี่ในแต่ละแกนเป็นอัตราส่วนของสองเลขจำนวนเต็ม เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}$ เป็นต้น

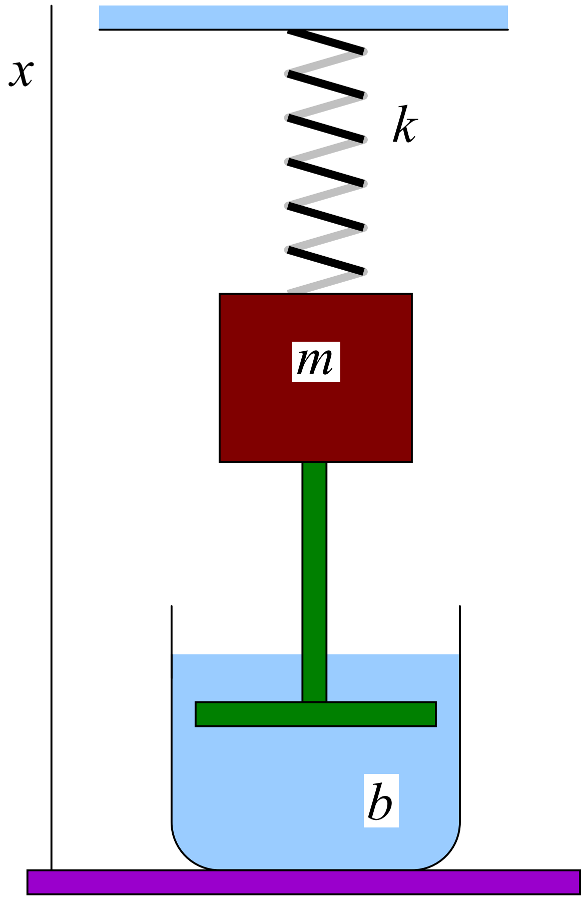


Graphical construction

Lissajous figures



5. การสั่นแบบหน่วง



พิจารณา การเคลื่อนที่แบบสั่น โดยถูกลดทอนลงด้วยแรงภายนอก เรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า การสั่นแบบหน่วง Damped สามารถจำลองเหตุการณ์ได้ดังรูป ซึ่งมีกล่องมวล m แขวนบนสปริงค่าคงที่ k และแขวนด้วยแท่งเชื่อมต่อกับแผ่นต้านทานของเหลว (สมมติแท่งกับแผ่นต้านทาน มีมวลน้อยมาก) แรงต้านทานจากของเหลวมีค่าเท่ากับ

$F_d = -bv$ โดยที่ b คือค่าคงที่ของการลดทอน Damping constant

ดังนั้น แรงลัพธ์ของการสั่นคือ $-bv - kx = ma$

$$-b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

ได้สมการการเคลื่อนที่ว่า

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

และได้ความสัมพันธ์ว่า $\omega' = 2\pi f' = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{b^2}{4m^2}}$

จะเห็นได้ว่าระยะกระจัดจะลดลงตามฟังก์ชัน เอ็กโปเนนเชียล ตามเวลา และพลังงานของวัตถุจะลดลงด้วย พลังงานจะถูกตัวกลางดูดกลืนไป

6. การสั่นแบบถูกแรงกระทำ

เพื่อทดแทนแรงที่สูญเสียโดย Damped จึงจำต้องหาแรงภายนอกมาชดเชยหรือทดแทน ไม่ให้แอมพลิจูดของการสั่นลดลง เรียกการสั่นนี้ว่า Force Oscillation ให้แรงภายนอกเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก คือ $F = F_0 \cos\omega t$

ดังนั้นแรงลัพธ์คือ $F_0 \cos\omega t - bv - kx = ma$

$$ma + bv + kx = F_0 \cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

ได้ผลเฉลยของสมการว่า

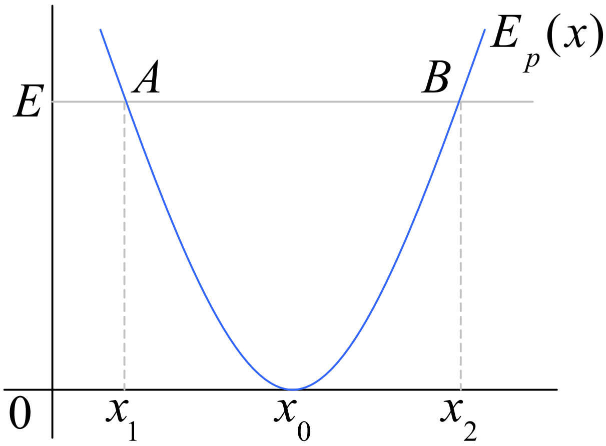
$$x = A\sin(\omega t - \phi)$$

โดยที่ $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{b\omega}{m})^2}}$ และ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

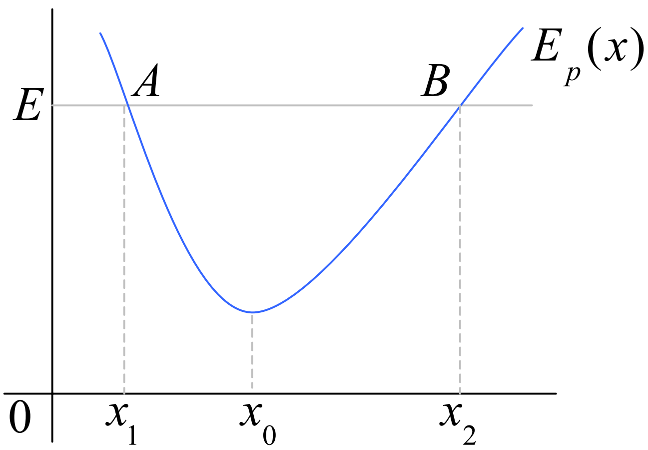
จากสมการจะเห็นได้ว่า แอมพลิจูด A มีค่าสูงสุดก็ต่อเมื่อ ค่าความถี่ของการสั่น ω มีค่าใกล้เคียงความถี่ธรรมชาติ ω_0 และค่าคงที่ลดทอน b มีค่าน้อย พลังงานในการสั่นจะถูกถ่ายเทให้กับวัตถุมากที่สุด เรียกว่าการเกิดการสั่นพ้อง Resonance

7. การสั่นแบบแอนฮาร์มอนิก

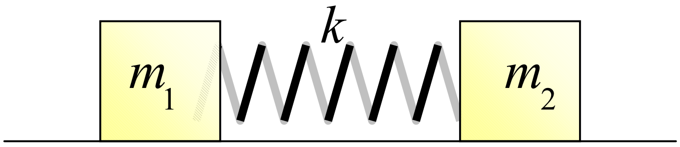
การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ที่ตำแหน่งสมดุล x_0 เมื่อเขียนกราฟระหว่าง พลังงานศักย์ E_p กับตำแหน่ง x ได้ดังรูปกราฟพาราโบลา มีจุดยอดที่จุด x_0 พลังงานศักย์ที่ตำแหน่งใด ๆ มีค่าเท่ากับ $E_p = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$



กรณีการสั่น ที่กราฟไม่เป็นพาราโบลา แต่มีค่าต่ำสุดอยู่ที่ x_0 ซึ่งเป็นตำแหน่งสมดุล เป็นผลมาจากการสั่นแบบแอนฮาร์มอนิก พลังงานศักย์ระหว่าง x_1 ถึง x_2 ไม่สมมาตรกัน และความถี่ของการสั่นขึ้นกับพลังงาน ตัวอย่างเช่น อันตรกิริยาของอะตอม 2 ตัว ที่มีพลังงานมาก



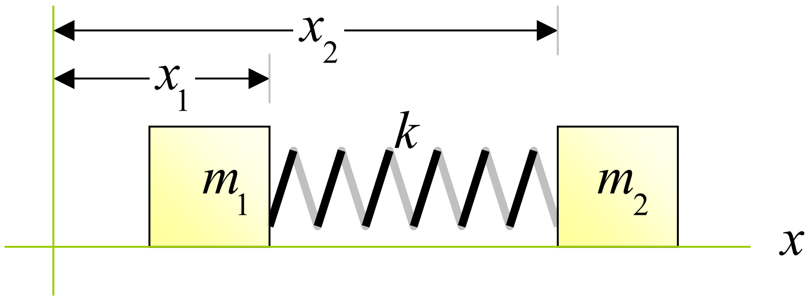
พิจารณาการสั่นของวัตถุมวล m_1 และ m_2 ขนาดใกล้เคียงกัน บนพื้นลื่น เชื่อมกันด้วยสปริงยาว l ค่านิจคงที่ของสปริง k ดังรูป



หลังจากปล่อยให้วัตถุทั้งสองสั่น พิจารณาที่ตำแหน่งใด ๆ ของวัตถุทั้งสอง กำหนดให้มวล m_1 และ m_2 อยู่ห่าง x_1 และ x_2 จากเส้นอ้างอิงตามลำดับ ดังนั้น ระยะยืด(หรือหด)ของสปริงมีค่าเท่ากับ

$$x = (x_2 - x_1) - l \qquad \boxed{1}$$

(ขณะสภาวะสมดุลไม่ยืดหรือหด $(x_2 - x_1) = l$)



พิจารณาแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล m_1 เท่ากับ $m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx$ $\boxed{2}$

พิจารณาแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล m_2 เท่ากับ $m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = +kx$ $\boxed{3}$

$\boxed{2} \times m_2$ ได้สมการ $$m_1 m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -kxm_2 \qquad \boxed{4}$$

$\boxed{3} \times m_1$ ได้สมการ $$m_1 m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = +kxm_1 \qquad \boxed{5}$$

นำสมการ **4**-**5** ได้ว่า $$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx(m_1 + m_2)$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -kx \qquad \boxed{6}$$

ให้ $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ เรียกว่า มวลลดทอน (Reduced mass) $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$

จากสมการ **1** $x = (x_2 - x_1) - l$ โดยที่ l คงที่ ได้ความสัมพันธ์

$$\frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = \frac{d^2(x+l)}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} + 0 = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad \boxed{7}$$

พิจารณา ขนาดของความเร่ง ได้ว่า $\dfrac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = \dfrac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2}$ $\boxed{8}$

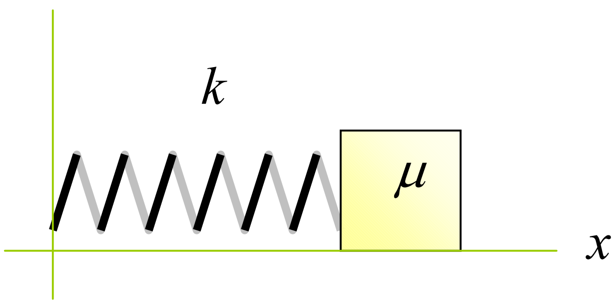
จากสมการ **6** **7** และ **8** สามารถเขียนสมการ ได้ว่า

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x = 0 \text{ และ } T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

ซึ่งเสมือนการสั่นแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก ที่มีมวล $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ สั่นดังรูป ซึ่งมีค่าสมการการเคลื่อนที่ สมการความเร็ว และ สมการความเร่ง ดังเช่น S.H.M.

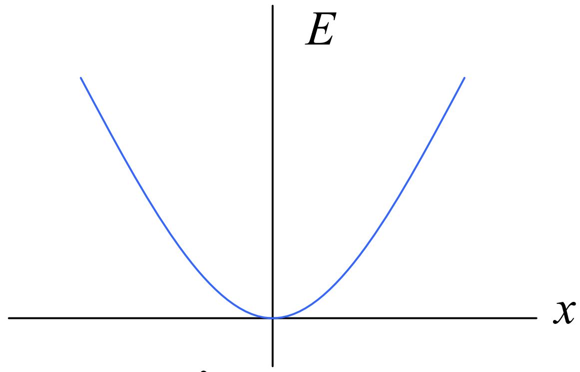
$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$
$$v = \omega A\cos(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$$



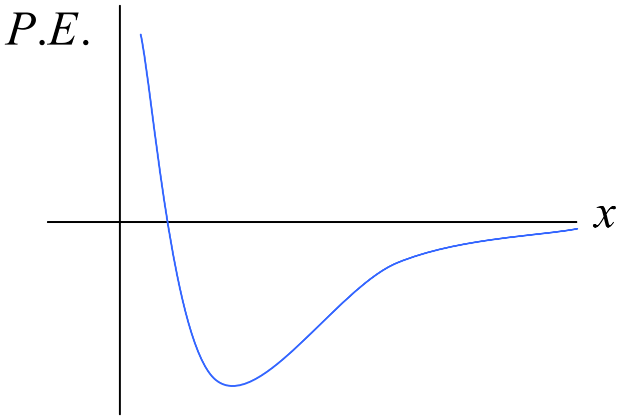
จากสมการ $\boxed{1}$ $x=(x_2-x_1)-l$ หาความเร็วและความเร่งได้ดังนี้

$$v=\frac{dx}{dt}=v_2-v_1 \quad ; \quad a=\frac{dv}{dt}=a_2-a_1$$

ถ้าแกว่งด้วยแอมพลิจูดน้อย ๆ จะมีกราฟของพลังงานเป็นรูปพาราโบลา ซึ่งเป็นแบบซิมเปิลฮาร์มอนิกอย่างง่าย



ถ้าแกว่งด้วยแอมพลิจูดมากขึ้น กราฟของพลังงานจะมีลักษณะดังรูป

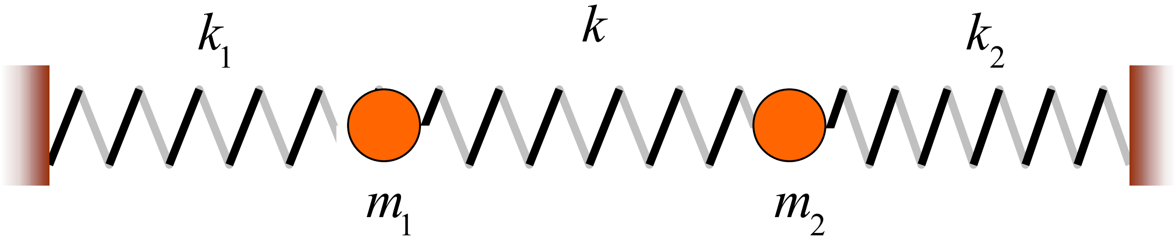


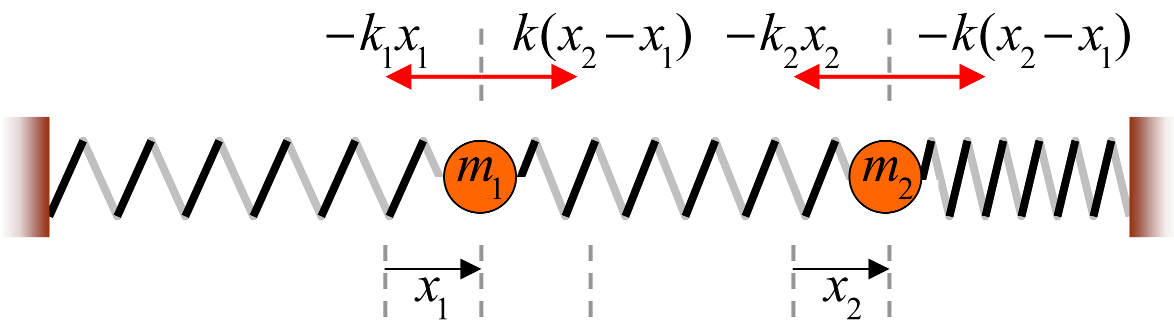
ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก แต่ไม่ใช่อย่างง่าย S.H.M. ซึ่งเรียกว่า แบบแอนฮาร์มอนิก (Anharmonic oscillation)

การเคลื่อนที่ดังกล่าว เกิดกับสารประกอบที่มีคู่ เช่น HCl , CO หรือพวกก๊าซอะตอมคู่ H_2 , O_2 เป็นต้น

8. ตัวแกว่งคู่ควบ

ตัวอย่างของการแกว่งแบบคู่ควบ เช่น การสั่นของวัตถุ ติดปลายสปริงดังรูป จะเห็นว่า วัตถุทั้งสอง ไม่มีความเป็นอิสระในการแกว่ง ผลลัพธ์สามารถอธิบายได้ในเรื่องขอการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างกัน





กำหนดให้ x_1 และ x_2 คือการกระจัดของมวล m_1 และ m_2 จากตำแหน่งสมดุล ให้การกระจัดเป็นบวกเมื่ออยู่ทางขวาของตำแหน่งสมดุล k_1 ดังนั้นสปริง ทำให้เกิดแรงคืนตัว $-k_1x_1$ บนมวล m_1 ทำนองเดียวกัน สปริง k_2 ทำให้เกิดแรงคืนตัว $-k_2x_2$ บนมวล m_2

สปริง k ยืดออกเป็นระยะ x_2-x_1 ดังนั้นแรงที่สปริง กระทำแต่ละมวลในการที่จะทำให้มีความยาวของสปริงเท่าเดิมคือ $k(x_2-x_1)$ บนมวล m_1 และ $-k(x_2-x_1)$ บนมวล m_2

สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาค

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-k_1x_1+k(x_2-x_1)$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k_2x_2-k(x_2-x_1)$$

จะเห็นว่า ความเร่งของแต่ละตัวแกว่งขึ้นกับตำแหน่งของอีกตัวหนึ่ง

พิจารณาพลังงานรวมของระบบ

พลังงานจลน์รวม

$$E_k=\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

พลังงานศักย์รวม

$$E_p=\tfrac{1}{2}k_1x_1^2+\tfrac{1}{2}k_2x_2^2+\tfrac{1}{2}k(x_1-x_2)^2$$

$$E_p=\tfrac{1}{2}(k_1+k)x_1^2+\tfrac{1}{2}(k_2+k)x_2^2-kx_1x_2$$

พลังงานรวม

$$E=E_p+E_k$$

$$E=[\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}(k_1+k)x_1^2]+[\tfrac{1}{2}m_2v_2^2+\tfrac{1}{2}(k_2+k)x_2^2]-kx_1x_2$$

จะสังเกตได้ว่า เทอมสุดท้ายเรียกว่า พลังงานคู่ควบหรือพลังงานอันตรกิริยา $(E_p)_{12}$ เทอมนี้ สามารถอธิบายการแลกเปลี่ยนพลังงาน ระหว่างสองตัวแกว่ง เช่นการสั่นของอะตอมในโมเลกุล