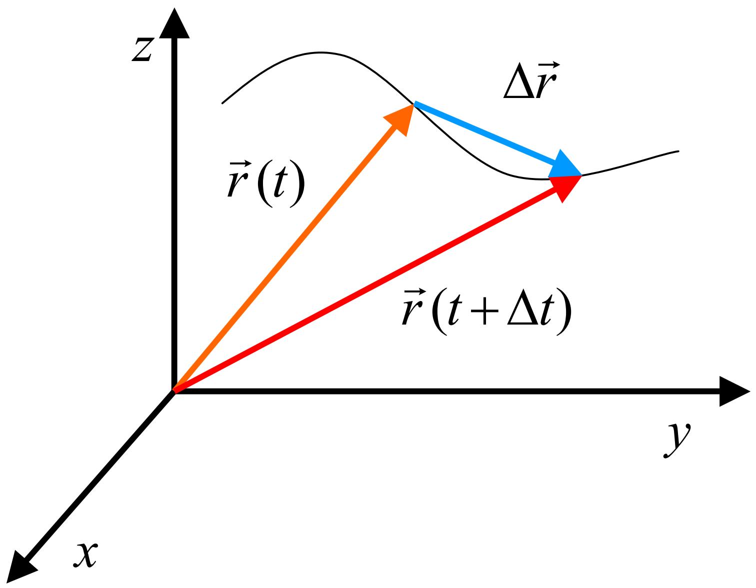
บทที่ 4 การเคลื่อนที่ในระนาบ

1. เวกเตอร์สามมิติและการเคลื่อนที่

กรอบอ้างอิงสำหรับการเคลื่อนที่ของวัตถุในสเปซ 3 มิตินั้น สามารถใช้เวกเตอร์ตำแหน่งเทียบกับจุดกำเนิดด้วยพิกัด x, y, z คือ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ หากแต่พิกัดทั้งสามแปรผันตามเวลา $x(t), y(t), z(t)$ และไม่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น กรณีที่ทราบตำแหน่งของวัตถุในระบบพิกัดฉาก ได้ว่า

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$



จากรูป เวลา t วัตถุอยู่ในตำแหน่ง $\vec{r}(t)$ เมื่อเวลาผ่านไป Δt วัตถุเคลื่อนไปอยู่ตำแหน่ง $\vec{r}(t+\Delta t)$ ฉะนั้นจะได้ว่า

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

เมื่อพิจารณา ลิมิตเวลาเข้าใกล้ศูนย์ $\Delta t \to 0$ ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งจะมีทิศตามเส้นสัมผัส ณ ตำแหน่งของเวลา t

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

สามารถหาค่าความเร็วของวัตถุขณะใดขณะหนึ่ง จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตำแหน่งเทียบกับเวลา ได้ว่า

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x\,\hat{i} + \vec{v}_y\,\hat{j} + \vec{v}_z\,\hat{k}$$

โดยที่ $\vec{v}_x = \dot{x} \quad ; \quad \vec{v}_y = \dot{y} \quad ; \quad \vec{v}_z = \dot{z}$

ในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์อันดับหนึ่งของความเร็วเทียบกับเวลา คือความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง ได้ว่า

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \dot{v}_x\,\hat{i} + \dot{v}_y\,\hat{j} + \dot{v}_z\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + \vec{a}_z\,\hat{k}$$

โดยที่ $\vec{a}_x = \dot{v}_x \quad ; \quad \vec{a}_y = \dot{v}_y \quad ; \quad \vec{a}_z = \dot{v}_z$

หรือ ความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง คืออนุพันธ์อันดับสองของตำแหน่งเทียบกับเวลา ดังสมการ

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + \vec{a}_z\,\hat{k}$$

โดยที่ $\vec{a}_x = \ddot{x} \quad ; \quad \vec{a}_y = \ddot{y} \quad ; \quad \vec{a}_z = \ddot{z}$

2. เวกเตอร์สามมิติและการเคลื่อนที่

เมื่อทราบค่าความเร่งในฟังก์ชันของเวลา $\vec{a}(t)$ จากสมการ $d\vec{v}=\vec{a}(t)dt$ เมื่ออินทริเกรต จะได้ว่า

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int_{t0}^{t}\vec{a}(t)dt$$

สามารถเขียนในรูปส่วนประกอบพิกัดฉาก ได้ดังนี้

$$v_x(t)=v_{x0}+\int_{t0}^{t}a_x(t)dt$$
$$v_y(t)=v_{y0}+\int_{t0}^{t}a_y(t)dt$$
$$v_z(t)=v_{z0}+\int_{t0}^{t}a_z(t)dt$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อทราบความเร็วในฟังก์ชันของเวลา $\vec{v}(t)$ จะได้

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_{t0}^{t}\vec{v}(t)dt$$

สามารถเขียนในรูปส่วนประกอบพิกัดฉาก ได้ดังนี้

$$x(t)=x_0+\int_{t0}^{t}v_x(t)dt$$
$$y(t)=y_0+\int_{t0}^{t}v_y(t)dt$$
$$z(t)=z_0+\int_{t0}^{t}v_z(t)dt$$

โดยที่ $$x_0=x(t_0)\ ;\ y_0=y(t_0)\ ;\ z_0=z(t_0)$$

3. การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

การเคลื่อนที่แบบ**โพรเจกไทล์** (projectile motion) คือ การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบสองมิติในแกนดิ่ง ซึ่งในแนวแกนดิ่งมีความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงโลก g ในแนวแกนระดับไม่มีความเร่งมาเกี่ยวข้อง จึงมีความเร็วในแนวระดับคงที่ โดยไม่พิจารณาผลของความต้านของอากาศ หรืออื่น ๆ ดังนั้นได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\vec{a}_x = 0 \quad ; \quad \vec{a}_y = -\vec{g}$$

พิจารณาแกน x ความเร่งจะเป็นศูนย์ ความเร็วคงที่ กรณี $x_0 = 0$ ได้สมการ

$$v_x(t) = v_{x0}$$
$$x(t) = v_{x0} t$$

พิจารณาแกน y ความเร่งจะเท่ากับ -g กรณี $y_0 = 0$ ได้สมการ

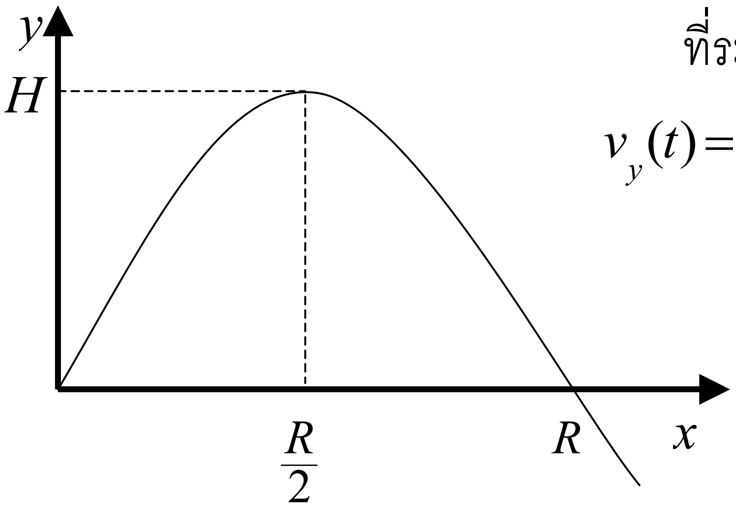
$$v_y(t) = v_{y0} - gt$$
$$y(t) = v_{y0} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

แก้สมการ แทนสมการ $x(t) = v_{x0} t$ ลงใน $y(t) = v_{y0} t - \tfrac{1}{2} g t^2$ กำจัดค่า t ได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด x-y เป็น

$$y = -\frac{g}{2v_{x0}^2} x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} x$$

จากสมการ ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง x-y เป็นรูป **พาราโบลาคว่ำ** ตัดแกนที่จุด $x_0 = 0$ และได้*ระยะไกลสุดในแนวแกน x* (พิสัย) เท่ากับ R ดังรูป

$$R = \frac{2 v_{x0} v_{y0}}{g}$$



ที่ระยะสูงสุดในแนวแกน y จะได้ $v_y(t)=0$ ดังนั้นหาความสูง สมการได้

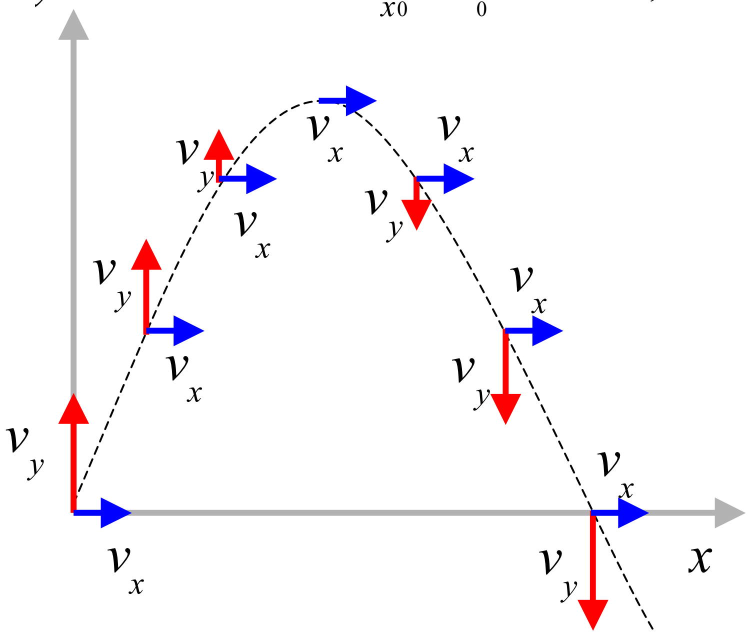
$$H=\frac{v_{y0}^2}{2g}$$

โดยที่ เวลา ที่วัตถุเคลื่อนที่ถึงตำแหน่งสูงสุด t_H และไกลสุด t_R คือ

$$t_H=\frac{v_{y0}}{g} \quad ; \quad t_R=\frac{2v_{y0}}{g}$$

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์โดยทั่วไปกำหนดความเร็วต้น v_0 อยู่ในทิศทางทำมุมกับแกน x เป็นมุม θ ได้ส่วนประกอบความเร็วต้นในแนวแกน x และ y

$$v_{x0}=v_0\cos\theta \quad ; \quad v_{y0}=v_0\sin\theta$$



ระยะไกลสุดในรูปมุม θ

$$R=\frac{2v_{x0}v_{y0}}{g}$$

$$R=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

มุมที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ไกลสุด คือมุม 45° หรือ $\frac{\pi}{4}$

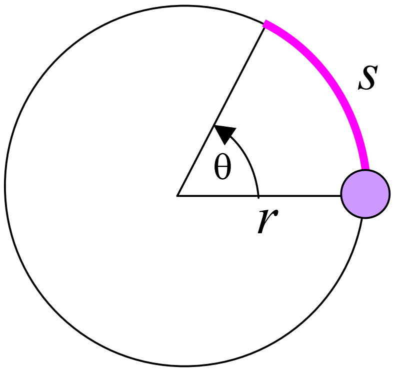
ที่ตำแหน่งใด ๆ $v_x=v\cos\theta=v_{x0}$; $v_y=v\sin\theta=v_{y0}-gt$

ความเร็วลัพธ์ที่ตำแหน่งใด ๆ เท่ากับ $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$

4. การเคลื่อนที่เป็นวงกลม

การเคลื่อนที่เป็นวงกลม คือการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งโดยมีรัศมีจากจุดๆ หนึ่งเท่ากัน และเส้นทางการเคลื่อนที่หมุนกลับมาทับเส้นทางเดิม

❖ การเคลื่อนที่เป็นวงกลมกับการกระจัดเชิงมุม



การกระจัดเชิงมุม เป็นการเพิ่มค่ามุมจากการกวาดไปของรัศมีวงกลมมีหน่วยเป็น ***เรเดียน*** กำหนดว่า มุมเรเดียน เท่ากับ ระยะทางตามแนววงกลมต่อรัศมี $\theta = \frac{s}{r}$ $radian$; $d\theta = \frac{ds}{r}$

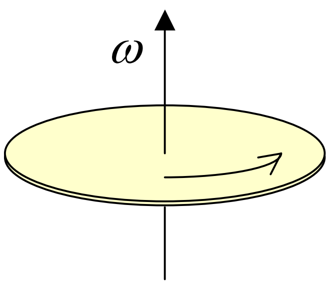
1 รอบ เท่ากับ 2π เรเดียน เท่ากับมุม 360°

❖ ความเร็วเชิงมุม คือการเปลี่ยนแปลงการกระจัดเชิงมุมเทียบต่อเวลา ได้อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ย $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $radian/sec$ โดยมีอัตราเร็วเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่งเท่ากับ $d\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $radian/sec$

พิจารณา ให้วัตถุเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ ได้ระยะกระจัดเท่ากับ 2π ใช้เวลาเท่ากับ 1 คาบ T จะได้อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยเท่ากับ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ โดยที่ f คือ ความถี่ของการหมุน

จากสมการ $d\theta = \frac{ds}{r}$ ได้ว่า $ds = rd\theta$ และจาก $v = \frac{ds}{dt}$ ได้สมการ

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} = r\omega$$



ทิศของความเร็วเชิงมุมเป็นไปตามความสัมพันธ์

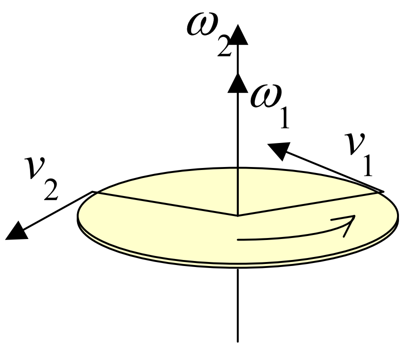
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

❖ ความเร่งเชิงมุม คือการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วเชิงมุมเทียบต่อเวลา โดยอัตราเร่งเชิงมุมเฉลี่ย $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $radian/sec^2$ และมีอัตราเร่งเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่งเท่ากับ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $radian/sec^2$ อัตราเร่งเชิงมุมอาจเขียนในรูปของ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

จากสมการ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ สามารถหาได้ว่า



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) + \left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

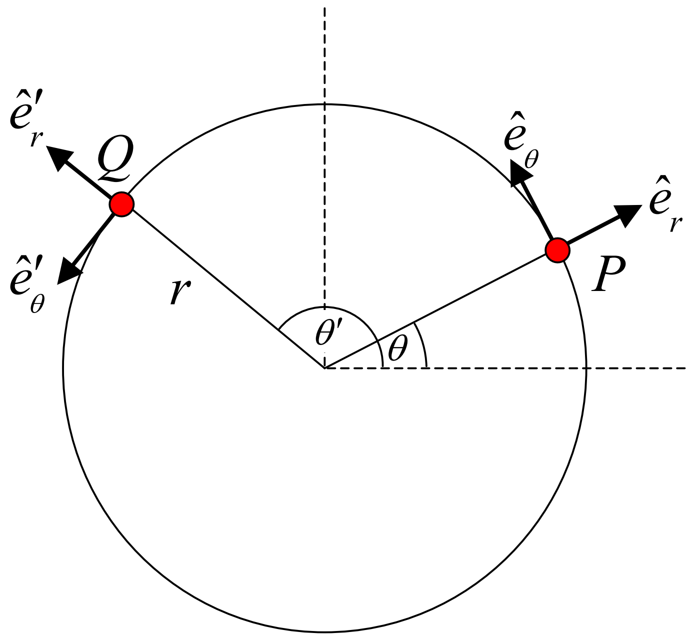
$$\vec{a} = (\vec{\alpha}\times\vec{r}) + (\vec{\omega}\times\vec{v})$$

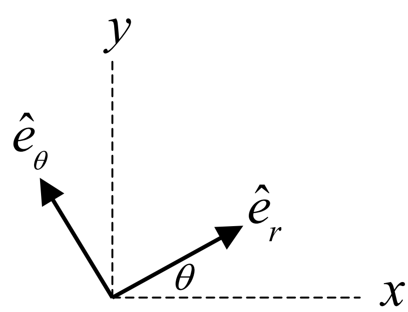
$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

โดยที่ $a_T = r\alpha$ เป็นความเร่งตามแนวสัมผัสวงกลม และ $a_C = \omega^2 r$ เป็นความเร่งในแนวรัศมี (ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง)

5. การเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอ

พิจารณาการเคลื่อนที่เป็นวงกลม โดย **พิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate)** ของอนุภาคจากจุด P ทำมุม θ กับแกน x ไปยังจุด Q ทำมุม θ' กับแกน x โดยมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศรัศมี $\hat{e}_r, \hat{e}'_r$ และทิศสัมผัสแนววงกลม $\hat{e}_\theta, \hat{e}'_\theta$





จากรูป ได้ว่า

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

ทำการอนุพันธ์ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} = -\hat{e}_r$$

จากนิยามเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้ว่า $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$; $\vec{r} = r\hat{e}_r$ ดังนั้น ความเร็วจะได้ว่า

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = 0 + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = r\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = r\omega\hat{e}_\theta = v\hat{e}_\theta$$

และจากความสัมพันธ์

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{e}_\theta+v\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

และจากความเร็วคงที่ ได้ว่า

$$\vec{a}=0+v\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=v\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$\vec{a}=v(-\omega\hat{e}_r)$$
$$\vec{a}=-v\omega\hat{e}_r=-\frac{v^2}{r}\hat{e}_r=-r\omega^2\hat{e}_r$$

จะเห็นได้ว่า ทิศของความเร่งอยู่ในแนวรัศมี ซึ่งเข้าหาจุดกำเนิด เป็นจุดศูนย์กลาง เรียกความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration) จากความสัมพันธ์ $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$ แทนลงสมการหาความสัมพันธ์ได้ ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง เท่ากับ

$$\vec{a}=-\frac{4\pi^2 r}{T^2}\hat{e}_r$$

6. การเคลื่อนที่เป็นวงกลมไม่สม่ำเสมอ

จากสมการ

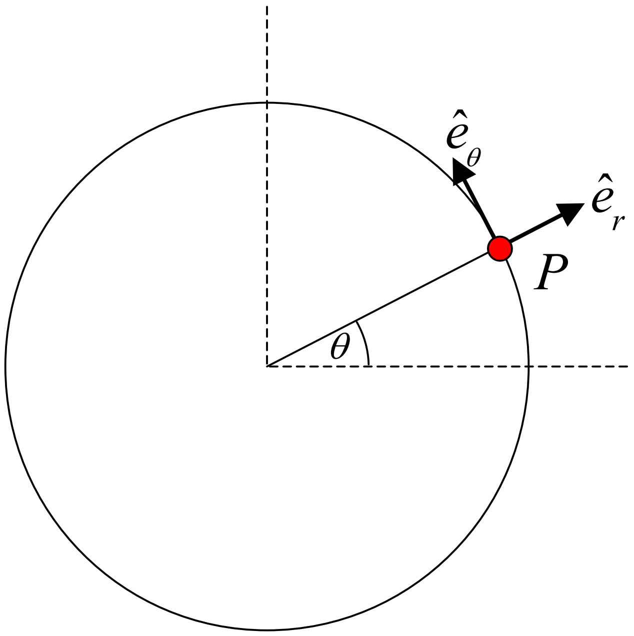
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\hat{e}_\theta+v\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

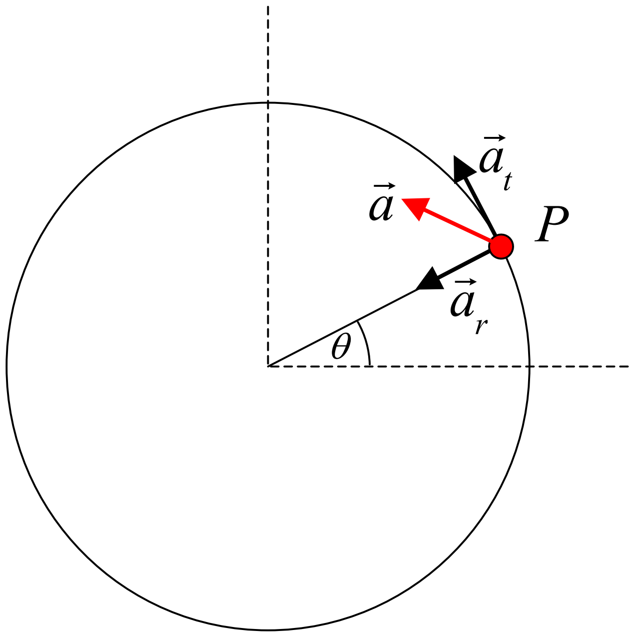
$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\hat{e}_\theta-\frac{v^2}{r}\hat{e}_r$$

$$\vec{a}=r\alpha\hat{e}_\theta-r\omega^2\hat{e}_r$$

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_r$$

โดยที่ $\vec{a}_t$ คือ ความเร่งในแนวสัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่ (tangential $\vec{a}_t$) และ $\vec{a}_r$ คือ ความเร่งในแนวรัศมี (radius $\vec{a}_r$)





ความเร่งลัพธ์ของการเคลื่อนที่แบบวงกลมไม่สม่ำเสมอ เป็นผลรวมของเวกเตอร์ความเร่งทั้งสององค์ประกอบ (แนวสัมผัสและแนวรัศมี) ได้เท่ากับ

$$a=\sqrt{a_t^2+a_r^2}$$

7. การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่

จากความสัมพันธ์ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $radian/sec^2$

$$d\omega = \alpha\, dt$$

กำหนดให้ เมื่อเวลา $t = 0$ ให้ $\omega = \omega_0$ อินทริเกรต สมการบน จะได้

$$\int_{\omega 0}^{\omega} d\omega = \int_{t0}^{t} \alpha\, dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

จากความสัมพันธ์ $d\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $radian/sec$

$$d\theta = \omega dt = (\omega_0 + \alpha t)dt$$

กำหนดให้ เมื่อเวลา $t = 0$ ให้ $\theta = \theta_0$ อินทริเกรต สมการบน จะได้

$$\int_{\theta 0}^{\theta} d\theta = \int_{t0}^{t} (\omega_0 + \alpha t)dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

กำหนดให้ เมื่อเวลา $t = 0$ ให้ $\theta_0 = 0$ จะได้

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

จากความสัมพันธ์ $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

เพราะฉะนั้น $\alpha d\theta = \omega d\omega$

ถ้า $t = 0$; $\omega = \omega_0$; $\theta = 0$ ผ่านการอินทริเกรต จะได้ว่า

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

จากสมการ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ แทนลงในสมการ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ จะได้ว่า

$$\theta = \tfrac{1}{2}\omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \tfrac{1}{2}\omega_0 t$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \alpha t + \omega_0)t$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$

เพราะฉะนั้น สรุปได้ว่า กรณีความเร่งเชิงมุมเป็นค่าคงตัว จะได้สมการการเคลื่อนที่ดังนี้

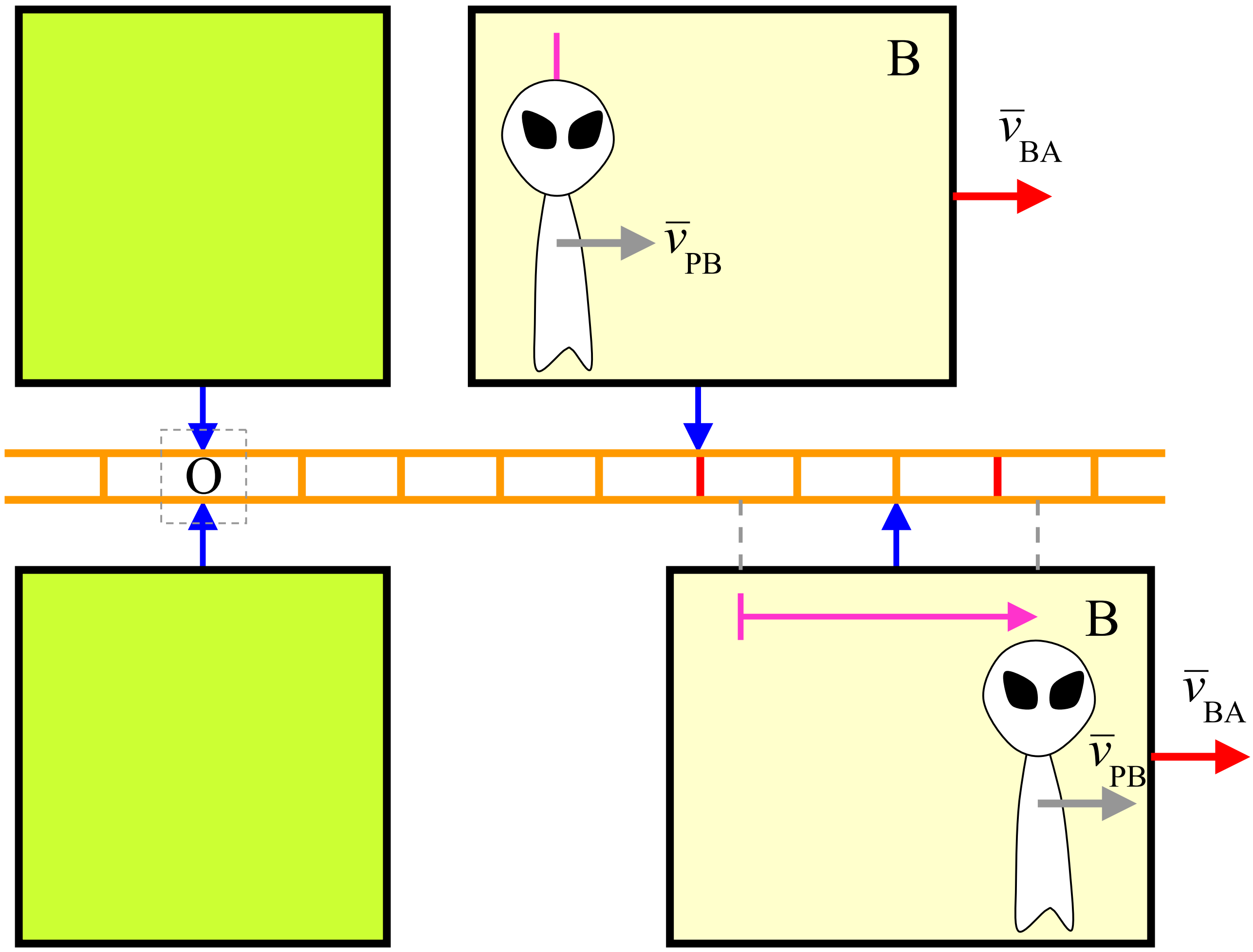
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

8. การเคลื่อนที่สัมพัทธ์

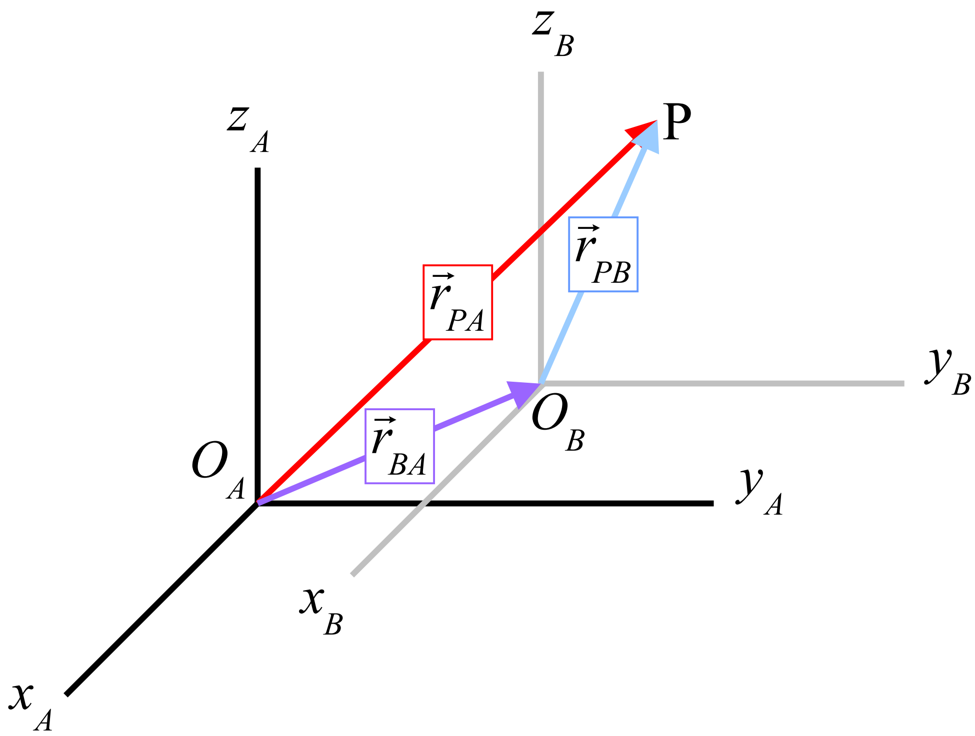
การเคลื่อนที่ ที่พิจารณานั้น ความเร็วที่ผู้สังเกตรับรู้ได้จะเป็น *ความเร็วสัมพัทธ์* (relative velocity) เทียบกับโลก การวัดความเร็วนั้นมักวัดเทียบกับกรอบอ้างอิงซึ่งอยู่นิ่ง อย่างไรก็ตาม กรอบอ้างอิงที่อยู่นิ่งสมบูรณ์นั้นไม่มี กรอบอ้างอิงที่สามารถนำมาใช้อ้างอิงในการวัดความเร็วได้ คือกรอบอ้างอิงที่มีความเร็วเป็นค่าคงตัวเรียกว่า *กรอบอ้างอิงเฉื่อย* (inertia reference frame)



จากรูป สมมติกรอบอ้างอิง A เป็นกรอบอ้างอิงอยู่นิ่ง กรอบอ้างอิง B เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $\bar{v}_{BA}$ สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิง A ภายในกรอบอ้าง

อิง B มนุษย์ต่างดาวเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v}_{PB}$ สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิง B ดังนั้น มนุษย์ต่างดาว เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\bar{v}_{PA}$ สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิง A จากความสัมพันธ์ จะได้ว่า $\bar{v}_{PA} = \bar{v}_{PB} + \bar{v}_{BA}$

พิจารณา *ความเร็วสัมพัทธ์* ในกรณีทั่วไปสามมิติ



ตามรูป กรอบอ้างอิง A อยู่นิ่ง กรอบอ้างอิง B เคลื่อนที่ ได้ความสัมพันธ์พิกัด

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

ความเร็วสัมพัทธ์จุด P เทียบกับกรอบอ้างอิง A เท่ากับความเร็วสัมพัทธ์จุด P เทียบกับกรอบอ้างอิง B บวกกับความเร็วสัมพัทธ์กรอบอ้างอิง B เทียบกรอบอ้างอิง A

ถ้าความเร็วกรอบอ้างอิง B เทียบกับกรอบอ้างอิง A ไม่เป็นค่าคงตัว ได้ว่า

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt}=\frac{d\vec{v}_{PB}}{dt}+\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

$$\vec{a}_{PA}=\vec{a}_{PB}+\vec{a}_{BA}$$

กรณีกรอบอ้างอิง A และB เป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย $\vec{a}_{BA}$ จะเท่ากับศูนย์

$$\vec{a}_{PA}=\vec{a}_{PB}$$

ซึ่งหมายความว่า ความเร่งของอนุภาคในแต่ละกรอบอ้างอิงเฉื่อยมีค่าเท่ากัน

ตามที่ได้พิจารณาตั้งแต่ต้น สเกลของเวลาในแต่ละกรอบอ้างอิงเท่ากัน ไม่มีเวลาในกรอบอ้างอิงเข้ามาเกี่ยวข้อง ในระดับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ พบว่าไม่เป็นจริง อย่างไรก็ตาม ถ้าความเร็วที่พิจารณาน้อยกว่าความเร็วแสงมาก ๆ สมการของพิกัดความเร็วและความเร่งที่ได้ จะสอดคล้องกับผลที่ได้จากทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

ตามสมการ ความเร็วสัมพัทธ์ของวัตถุB เทียบกับวัตถุ A

$$\vec{v}_{BA}=\vec{v}_{BO}+\vec{v}_{OA}$$

ในทำนองเดียวกัน ความเร็วสัมพัทธ์ของวัตถุB เทียบกับวัตถุ C

$$\vec{v}_{BC}=\vec{v}_{BO}+\vec{v}_{OC}$$

นำไปแทนสมการได้ว่า

$$\vec{v}_{BA}=\vec{v}_{BC}-\vec{v}_{OC}+\vec{v}_{OA}$$

$$\vec{v}_{BA}=\vec{v}_{BC}+\vec{v}_{CO}+\vec{v}_{OA}$$

ในทำนองเดียวกัน ความเร่งสัมพัทธ์อาจหาได้จาก

$$\vec{a}_{BA}=\vec{a}_{BC}+\vec{a}_{CO}+\vec{a}_{OA}$$

หนังสืออิเล็กทรอนิกส์	
ฟิสิกส์ 1(ภาคกลศาสตร์(	ฟิสิกส์ 1 (ความร้อน)
ฟิสิกส์ 2	กลศาสตร์เวกเตอร์
โลหะวิทยาฟิสิกส์	เอกสารคำสอนฟิสิกส์ 1
ฟิสิกส์ 2 (บรรยาย(	แก้ปัญหาฟิสิกส์ด้วยภาษา c
ฟิสิกส์พิศวง	สอนฟิสิกส์ผ่านทางอินเตอร์เน็ต
ทดสอบออนไลน์	วีดีโอการเรียนการสอน
หน้าแรกในอดีต	แผ่นใสการเรียนการสอน
เอกสารการสอน PDF	กิจกรรมการทดลองทางวิทยาศาสตร์
แบบฝึกหัดออนไลน์	สุดยอดสิ่งประดิษฐ์
การทดลองเสมือน	
บทความพิเศษ	ตารางธาตุ)ไทย1) 2 (Eng)
พจนานุกรมฟิสิกส์	ลับสมองกับปัญหาฟิสิกส์
ธรรมชาติมหัศจรรย์	สูตรพื้นฐานฟิสิกส์
การทดลองมหัศจรรย์	ดาราศาสตร์ราชมงคล
แบบฝึกหัดกลาง	
แบบฝึกหัดโลหะวิทยา	แบบทดสอบ
ความรู้รอบตัวทั่วไป	อะไรเอ่ย ?
ทดสอบ)เกมเศรษฐี(	คดีปริศนา
ข้อสอบเอนทรานซ์	เฉลยกลศาสตร์เวกเตอร์
คำศัพท์ประจำสัปดาห์	
ความรู้รอบตัว	
การประดิษฐ์แของโลก	ผู้ได้รับโนเบลสาขาฟิสิกส์
นักวิทยาศาสตร์เทศ	นักวิทยาศาสตร์ไทย
ดาราศาสตร์พิศวง	การทำงานของอุปกรณ์ทางฟิสิกส์
การทำงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ	

การเรียนการสอนฟิสิกส์ 1 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต

1. การวัด	2. เวกเตอร์
3. การเคลื่อนที่แบบหนึ่งมิติ	4. การเคลื่อนที่บนระนาบ
5. กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	6. การประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
7. งานและพลังงาน	8. การดลและโมเมนตัม
9. การหมุน	10. สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง
11. การเคลื่อนที่แบบคาบ	12. ความยืดหยุ่น
13. กลศาสตร์ของไหล	14. ปริมาณความร้อน และ กลไกการถ่ายโอนความร้อน
15. กฎข้อที่หนึ่งและสองของเทอร์โมไดนามิก	16. คุณสมบัติเชิงโมเลกุลของสสาร
17. คลื่น	18.การสั่น และคลื่นเสียง

การเรียนการสอนฟิสิกส์ 2 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต

1. ไฟฟ้าสถิต	2. สนามไฟฟ้า
3. ความกว้างของสายฟ้า	4. ตัวเก็บประจุและการต่อตัวต้านทาน
5. ศักย์ไฟฟ้า	6. กระแสไฟฟ้า
7. สนามแม่เหล็ก	8.การเหนี่ยวนำ
9. ไฟฟ้ากระแสสลับ	10. ทรานซิสเตอร์
11. สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเสาอากาศ	12. แสงและการมองเห็น
13. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	14. กลศาสตร์ควอนตัม
15. โครงสร้างของอะตอม	16. นิวเคลียร์

การเรียนการสอนฟิสิกส์ทั่วไป ผ่านทางอินเตอร์เน็ต

1. จลศาสตร์)kinematic)	2. จลพลศาสตร์ (kinetics)
3. งานและโมเมนตัม	4. ซิมเปิลฮาร์โมนิก คลื่น และเสียง
5. ของไหลกับความร้อน	6.ไฟฟ้าสถิตกับกระแสไฟฟ้า
7. แม่เหล็กไฟฟ้า	8. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับแสง
9. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ อะตอม และนิวเคลียร์	

ฟิสิกส์ราชมงคล